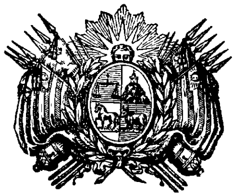


25 de Agosto de 1825

En el mismo día del corriente mes cumplirán sesenta y nueve años, que los representantes del pueblo uruguayo reunidos en Asamblea en la entonces Villa de la Florida, declararon reasumida en la Nación su propia Soberanía y rotos para siempre los vínculos oprobiosos que ataban á nuestra joven nacionalidad al carro de dominadores extranjeros, que con mano férrea ó suave, se habían venido sucediendo en el codiciado dominio de nuestro suelo.

Nada más grande en el desenvolvimiento de los sucesos históricos, nada más moralmente admirable en el cumplimiento de las leyes encargadas de constituir las nacionalidades y las agrupaciones humanas, que contemplar, declararse, en virtud de la fuerza incontrastable del Derecho, tan vilipendiado con frecuencia pero siempre resistente é inconmovible, á una colectividad que se siente con las energías del presente y con las aspiraciones del porvenir, libre é independiente de toda tutela extraña y ya en condiciones de demandar un puesto al mundo en el hermoso concierto de las colectividades civilizadas.

Nuestros próceres, tan patriotas como honrados, que realizaron acto tan sublime, convirtiéndonos en ciudadanos responsables de nuestra conducta cívica y legándonos instituciones que, aunque profanadas por sus descendientes, han sido y son el puerto seguro donde el país ha buscado un refugio en los días luctuosos de sus derrumbamientos y de sus desgracias, se hicieron acreedores por sus virtudes y por aquel profundo sentido práctico que revelaron en la organización política de la República, que parecía tan ajeno á su época y á la sencillez de sus costumbres, al reconocimiento y á la alabanza de las generaciones orientales que han desfilado en la marcha incesante de los tiempos.

Cuando en el 18 de Julio de 1830, se proclamó y promulgó nuestro Código Fundamental, pudieron observar satisfechos los prohombres del año 25, las proyecciones lógicas de su gloriosa y magna obra, y decir como el anciano israelita: ahora la justicia alta puede despedirnos, acabada nuestra misión y realizada la epopeya de nuestros patrióticos ideales.

Los Anales de la Universidad se inclinan respetuosos sobre la tumba de nuestros venerandos patricios, cuya memoria vive sin debilitarse en el alma de los buenos ciudadanos, y saluda á la efémeride que va á conmemorarse dignamente, haciendo votos, en el altar de la patria, por el triunfo definitivo de las bellas y liberales instituciones con que supieron honrarla.

ANALES DE LA UNIVERSIDAD

AÑO III — MONTEVIDEO — 1894 — TOMO V

Apuntes sobre ampliación de matemáticas elementales

Redactados de acuerdo con el programa vigente para los aspirantes al ingreso en la Facultad de Matemáticas

POR EDUARDO P. MONTEVERDE

Agrimensor y Catedrático de la Universidad

(Continuación)

CAPÍTULO II

Teoría combinatoria (1)

COORDINACIONES. — PERMUTACIONES. — COMBINACIONES

Coordinaciones

9. **Definición.**—Se llaman *coordinaciones* ó arreglos los diversos grupos que se pueden formar con varios elementos, compuestos de igual número de éstos y diferenciándose entre sí por los elementos que los forman ó por el orden en que están colocados.

Las coordinaciones se llaman binarias, ternarias, etc., ó de primero, segundo.... orden, según que el número de los elementos sea de dos, tres, etc. Así, por ejemplo, las coordinaciones binarias de las letras a, b y c, son ab, ac, ba, bc, ca, y cb, que son todos los grupos binarios diferentes por concepto de orden ó de composición que se pueden formar con ellas.

(1) Como esta teoría se estudia en el Curso de Algebra Superior y no exige además el programa de ampliación, sino una muy pequeña parte de ella, la trataremos lo más elementalmente posible.

NOTACIÓN. — El número de coordinaciones de m elementos tomados de dos en dos, de tres en tres.... de *n* en *n* se representa generalmente por C_2^m, C_3^m.... C_n^m.

Nosotros sustituiremos la C por la letra A con el objeto de no confundirla con la notación semejante de las combinaciones que veremos más adelante.

Por consiguiente, el número de arreglos ó coordinaciones de *m* objetos tomados n á n, lo representaremos por A^m_n .

10. PROBLEMA 1.° — *Formar todos los arreglos de m elementos tomados n á n.*

Los arreglos que se pueden formar con m letras, p. ej., tomadas una á una, son evidentemente a, b, c, d..... l.

Si á la derecha de cada letra colocamos las (m — 1) letras restantes, tendremos los arreglos de las *m* letras tomadas de dos en dos, pues cada grupo se diferenciará de los demás: ó en las letras que lo forman, ó en el orden en que éstas están colocadas, y no podrá haber un arreglo más.

Si á la derecha de cada arreglo binario se coloca cada una de las (m — 2) letras restantes, obtendremos del mismo modo todos los arreglos de á tres letras, y así sucesivamente. De esto deducimos la siguiente:

REGLA GENERAL. — *Para formar los arreglos de m elementos tomados de n en n, se formarán los del orden (n—1), y al lado de cada uno de éstos se coloca cada uno de los elementos restantes.*

11. PROBLEMA 2.° — *Hallar el número total de coordinaciones de m elementos tomados n á n.*

Del procedimiento que acabamos de exponer para formar los arreglos binarios de *m* elementos, se deduce que cada letra produce (m — 1) arreglos de ese orden; luego *m* letras producirán m (m — 1), y por consiguiente

$$A_2^m = m(m-1)$$

Por el mismo procedimiento hemos visto que en la formación de las ternarias cada arreglo binario produce (m—2) ternarios, luego el número total de los binarios A_2^m producirá $A_2^m \times (m-2)$ ó $A_3^m = m(m-1)(m-2)$.

Y por inducción deducimos que, en general, el número de arreglos de m elementos tomados n á n será

$A_n^m = m(m-1)(m-2) \ldots (m-(n-1) = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)$.

Permutaciones

12. Definición. — Se llaman permutaciones de varios elementos las coordinaciones de los mismos de un orden igual al número de ellos, diferenciándose por consecuencia unas de otras únicamente en el orden en que sus elementos están colocados.

Así, por ej., las permutaciones de las letras a y b son ab y ba.

Las de las letras a, b y c son abc, bac, cab, acb, bca y cba.

Notación. — El número de permutaciones de dos objetos se indica por P_2, el de tres por P_3 y en general el de m por P_m.

13. Problema. — *Formar todas las permutaciones que se pueden hacer con m elementos.*

Para resolver este problema no hay más que formar las coordinaciones de m elementos tomados m á m; pues las permutaciones de m elementos, no son, según definición, otra cosa que las coordinaciones de m elementos tomados m á m.

14. Problema 2.° — *Hallar el número de permutaciones de m elementos.*

Es evidente, por lo dicho anteriormente, que este número se obtendrá habiendo n = m en la fórmula que da el número de coordinaciones de m elementos tomados n á n.

Así es que tendremos:

$$P_m = m\ (m-1)\ (m-2) \ldots (m-m+1) \text{ ó}$$
$$P_m = 1.\ 2.\ 3. \ldots m = !\, m$$

Nota. — El producto de la serie natural de los números desde 1 hasta *m* se representa por el símbolo ! m.

15. Sucesiones é inversiones. — Cuando en una permutación de letras afectadas de índices numéricos, dos de dichos índices se hallan en el orden de la numeración, se dice que estos índices forman *sucesión*, y en el caso contrario, ó cuando el mayor precede al menor, que forman *inversión*. Según esto, en el grupo $a_2\ b_3\ c_1$ hay una sucesión y dos inversiones.

Una permutación de esta naturaleza se llama de clase par si el número de inversiones de sus índices es par, y se llama de clase impar si el número de inversiones de sus índices es impar.

Sean, por ejemplo, los grupos

$$a_4\ b_5\ c_1\ d_2\ e_3 \text{ y } a_2\ b_5\ c_1\ d_4\ e_3$$

El primero tiene 6 inversiones y el segundo tiene 5, ó lo que es lo mismo, el primero es de clase par y el segundo de clase impar.

16. TEOREMA. — *Si en una permutación con índices se cambian entre sí dos elementos, la permutación cambia de clase.*

1.° Si los elementos son inmediatos, como sería permutando a_2 con c_5 en el grupo b_3 a_2 c_5 d_1 f_4, que lo convertiría en b_3 c_5 a_2 d_1 f_4, es evidente que las inversiones de los elementos b_3 d_1 f_4 no han variado, ni las que a_2 y c_3 forman con dichas letras; luego no se ha aumentado más que una inversión, que es la de los dos elementos a_2 y c_3.

2.° Los elementos que se permutan no son consecutivos. Sea el grupo c_4 d_1 b_3 a_5 f_6 en que se cambian entre sí los elementos c_4 y f_6. Vamos á demostrar que también en este caso la permutación cambia de clase.

En efecto:

Del grupo c_4 d_1 b_3 a_5 f_6 podemos, mediante cuatro inversiones consecutivas, llegar al

$$f_6 \ c_4 \ d_1 \ b_3 \ a_5$$

Ahora podemos mediante tres inversiones consecutivas hacer retroceder a_5 c_4 y llegaremos al grupo

$$f_6 \ d_1 \ b_3 \ a_5 \ c_4$$

Observamos que hemos hecho primero tantas permutaciones consecutivas como elementos intermedios más uno, y después tantas como elementos intermedios; luego en general hemos hecho $2 \, n + 1$ permutaciones consecutivas, representando por n el número de elementos intermedios.

Vemos, pues, que no siendo consecutivos los elementos permutados, aumenta en un número impar el número de inversiones; luego el grupo cambia de clase, puesto que por cada inversión que aumenta así sucede.

Combinaciones

17. DEFINICIÓN. — Se llaman *combinaciones* las coordinaciones que se pueden formar con varios elementos tomados dos á dos, tres á tres, etc., de modo que cada una se diferencie de las demás por lo menos en un elemento.

Las combinaciones, según que el número de sus elementos sea dos, tres. . . . n, se llaman binarias, ternarias. . . . ó de segundo, tercero. . . . enésimo orden.

Así, por ej., las combinaciones binarias de las letras a, b y c, son ab, ac y bc.

Las ternarias de las letras a, b, c, d y e serán:

abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, y cde

Notación. — El número de combinaciones de m elementos tomados de dos en dos, de tres en tres.... de n en n se representa respectivamente por

$$C_2^m,\ C_3^m \ldots\ldots C^m_n$$

Problema 1.° — *Formar las combinaciones de m elementos tomados n á n.*

Las combinaciones que se pueden formar con *m* letras, por ej., tomadas una á una son, evidentemente,

a, b, c, d, ... l

Si á la derecha de la letra *a* colocamos las (m — 1) letras restantes; á la derecha de la letra *b* cada una de las m — 2 que le siguen; á la derecha de la letra c cada una de las que le siguen, y así sucesivamente, obtendremos evidentemente las combinaciones binarias de las letras a, b, c.... l; pues las combinaciones así obtenidas serán todos los grupos posibles de á dos elementos que llenen las condiciones que determina la definición.

Si á la derecha de la primera combinación a b colocamos una á una las m — 3 letras restantes; si á la derecha de la letra c colocamos cada una de las m — 3 letras restantes, y así sucesivamente, obtendremos las combinaciones ternarias de los m elementos, pues las combinaciones así obtenidas serán todos los grupos posibles de tres elementos que llenarán la condición establecida en la definición.

Por un procedimiento idéntico formaríamos las cuaternarias, etc.

De lo expuesto deducimos la siguiente

Regla general. — *Para formar las combinaciones de m elementos tomados n á n, se forman primero las del orden n — 1, y á la derecha de cada una de ellas se colocan uno á uno los elementos que siguen al último de la combinación que se considera.*

19. Problema 2.° — *Hallar el número total de combinaciones de m elementos tomados n á n.*

Si suponemos que tenemos formadas todas las combinaciones de m elementos tomados n á n y hacemos todas las permutaciones posibles con los elementos de cada combinación, obtendremos todos los arre-

glos del orden n que se pueden hacer con m elementos, pues cada grupo así formado se diferenciará de los demás en los elementos que lo forman ó en el orden en que éstos están colocados; pero cada combinación de n elementos produce 1.2.3....n permutaciones (14), luego C_n^m combinaciones producirán

$$C_n^m \times P_n, \text{ cuyo producto}$$

dará el número de arreglos.

Así que tendremos:

$$C_n^m \times P_n = A_n^m, \text{ de donde}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m} \text{ ó}$$

$$C_n^m = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots n}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{!\,n}$$

Ejercicios para resolver

1. ¿Cuántos arreglos pueden hacerse con las letras a, b, c, d, e, tomándolas de dos, de tres, de cuatro en cuatro?
2. ¿De cuántos modos pueden escribirse las letras que entran en la palabra *Roma* tomándolas todas juntas?
3. ¿Cuántas permutaciones pueden formarse con los dos primeros números dígitos? ¿Cuántas con los tres primeros? ¿Cuántas con los cuatro primeros?
4. ¿Cuántas coordinaciones pueden hacerse con 15 objetos tomados de á 6 á 6?
5. Un negociante que tiene 8 clases de café, quiere hacer mezclas por partes iguales, tomando para cada mezcla tres clases diferentes: ¿cuántas mezclas diferentes puede hacer?
6. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse seis personas alrededor de una mesa?
7. En las combinaciones ternarias de 5 letras a b c d e, ¿en cuántas se encontrará la a?
8. Con 16 soldados ¿cuántas guardias diferentes de á 4 cada una pueden formarse?

9. Con 8 campanas ¿cuántas variedades de repique pueden formarse con 5 de ellas y cuántas empleándolas todas?

10. Hallar el número de permutaciones de todas las letras que componen la palabra *República.*

11. En las permutaciones formadas con las letras a, b, c, d, e, f, g, ¿cuántas empezarán con *ab,* cuántas con *abc* y cuántas con *abcd?*

Determinantes (1)

Definición. — *Siendo dado el producto de n cantidades* $a_1\, b_2\, c_3 \ldots . l_n$, *si se permutan de todas las maneras posibles todos los índices, dejando fijas las letras, y se da á cada grupo así formado el signo + ó el signo — según que el número de inversiones de sus índices sea par ó impar, la suma algebraica de los grupos se llama la determinante de las* n^2 *cantidades*

$$
\begin{array}{l}
a_1\; b_1\; c_1 \;\ldots .\; l_1 \\
a_2\; b_2\; c_2 \;\ldots .\; l_2 \\
. \\
. \\
. \\
. \\
a_n\; b_n\; c_n \;\ldots .\; l_n
\end{array}
$$

Cada una de esas n^2 cantidades se llama *elemento* de la determinante, y los diferentes grupos ó productos obtenidos se llaman *términos* de la determinante.

El producto $a_1\, b_2\, c_3 \ldots . l_n$ que tiene las letras y los índices en su orden natural, se llama *término principal* de la determinante.

Notación. — Varias notaciones se emplean para designar la determinante de las n^2 cantidades expresadas: la más empleada es colocar los elementos en cuadro dispuestos por filas y columnas ordenadas por las letras y por los índices y comprendidos todos por dos rectas verticales que se llaman *barras.*

Para abreviar representaremos también una determinante por la letra $\triangle$.

El cuadro que comprende los elementos que constituyen la determinante se llama *matriz de la determinante.*

(1) Con ligeras modificaciones utilizamos para el desarrollo de esta teoría los Apuntes sobre las Determinantes, escritos expresamente para la clase de Ampliación por don Juan Monteverde.

De modo que la determinante de las n^2 cantidades,

$$\begin{matrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_1 l_2 \dots l_n \end{matrix} \quad \text{se indica por} \quad \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_1 l_2 \dots l_n \end{vmatrix}$$

De la definición de la determinante resulta que *cada uno de sus términos tiene un elemento de cada fila y un elemento de cada columna*, pues figuran en cada término todas las letras y todos los índices.

Observando la matriz de la determinante se ve que el *término principal es constituído por los elementos en diagonal de arriba abajo y de izquierda á derecha.*

Las determinantes se clasifican en *grados*, tomando la denominación del número de factores de sus términos: así una determinante cuyos términos tienen 2, 3, 4... factores ó elementos, se dice que es de 2.°, 3.°, 4.°... grado. *La matriz tiene siempre tantas filas y tantas columnas como indique su grado:* el número de elementos es, pues, siempre cuadrado del número que expresa el grado.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{es de 2.° grado.}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{es de 3.}^{\text{er}} \text{ grado.}$$

21. Teorema.—*Si se disponen los elementos de una matriz de modo que las filas se hagan columnas y que las columnas se hagan filas, la determinante no varía.*

En efecto, si se comparan las dos matrices

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

que resultan de cambiar las filas en columnas, se observará que la diagonal correspondiente al término principal permanece la misma: luego resulta de la definición que las determinantes son idénticas.

Nota. — Este teorema indica que *cuanto se demuestre para las colvmnas se aplica también á las filas, y recíprocamente.*

22. Teorema.—*Cuando en una matriz se permutan dos filas ó dos columnas, la determinante cambia de signo, ó lo que es lo mismo, queda multiplicada por — 1.*

En efecto, permutar dos filas equivale á permutar dos índices en cada término de la determinante; pero según el *Teorema de las Inversiones,* cuando se permutan dos índices en un término, éste cambia de clase y por consiguiente de signo, y como cambian todos, cambiará también la determinante.

Luego, podemos establecer:

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & l_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\
\vdots & & & & \\
a_h & b_h & c_h & \cdots & l_h \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_k & b_k & c_k & \cdots & l_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_n & b_n & c_n & \cdots & l_n
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & l_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_k & b_k & c_k & \cdots & l_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_h & b_h & c_h & \cdots & l_h \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_n & b_n & c_n & \cdots & l_n
\end{vmatrix}
$$

Nota. — De este teorema resulta: 1.° *que si se hace un número par de permutaciones de filas ó de columnas, la determinante no cambia de signo, y cambia de signo haciendo un número impar de permutaciones.* 2.° *que si se permuta una columna ó una fila con su inmediata sucesivamente p veces, la determinante cambia ó no cambia de signo según que el número p de permutaciones sea impar ó par,* ó lo que es igual, *queda multiplicada por* $(-1)^p$.

23. TEOREMA. — *Cuando una matriz tiene dos filas iguales, ó dos columnas iguales, la determinante es nula.*

Sea

$$
(A)\qquad \Delta = \begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
a_n & b_n & c_n & \dots & l_n
\end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ (2) \\ \\ \\ \\ \\ (h) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

que tiene las filas (2) y (h) iguales: vamos á demostrar que la determinante es nula. Si permutamos las filas (2) y (h) según el teorema (14), la determinante cambia de signo; luego

$$
(B)\qquad -\Delta = \begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
a_n & b_n & c_n & \dots & l_n
\end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ (h) \\ \\ \\ \\ \\ (2) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

pero los segundos miembros de las igualdades (A) y (B) son idénticos; luego con los primeros miembros puede formarse la igualdad.

$$\Delta = -\Delta \quad ó \quad \Delta + \Delta = 0$$
$$ó\ 2\,\Delta = o, \quad \text{de donde} \quad \Delta = o.$$

Queda, pués, demostrado que la determinante es nula.

24. TEOREMA.—*Cuando se multiplican por un mismo número todos los elementos de una columna, ó todos los de una fila, la determinante queda multiplicada por ese número.*

De la definición de la determinante (20) resulta que cada término tiene un elemento de cada fila y un elemento de cada columna: luego

multiplicar por un mismo número todos los elementos de una fila ó de una columna implica introducir ese factor en cada uno de los términos de la determinante; por consiguiente, quedará multiplicada la determinante por ese factor.

Así, pues, dada la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

si multiplicamos por m una columna cualquiera, la 2.ª, por ejemplo, la determinante quedará multiplicada por m, cuyo factor se pone fuera de las barras. Entonces

$$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & mb_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

NOTA I. — Resulta de este teorema que *cuando en una matriz todos los elementos de una fila ó de una columna tienen un factor común, éste puede ponerse en evidencia fuera de barras.*

$$\text{Así} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 20 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & a^4 \\ b^2 & b^3 & b^4 \\ c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ b^2 & b^3 & b^4 \\ c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix} = a^2 b^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix} = a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

NOTA II. — Como consecuencias de este teorema, resulta también:

1.° *No cambia el valor de una determinante suprimiendo ó introduciendo un factor común á todos los elementos de una fila, ó de una columna, con tal que ese factor se ponga en evidencia fuera de barras como multiplicador ó como divisor de la determinante.*

2.° *Se cambia el signo de la determinante al cambiar de signo á todos los elementos de una fila, ó de una columna, porque equivale á multiplicarlos por — 1.*

25. TRANSFORMACIÓN DE MATRICES.—El teorema anterior y sus consecuencias nos permiten transformar una matriz, de modo que los elementos satisfagan á ciertas condiciones, entre las cuales mencionare-

mos, por la aplicación que tiene en el cálculo de las determinantes, la de reducir á 1 todos los elementos de una columna ó de una fila sin alterar el valor de la determinante.

1.ª TRANSFORMACIÓN

Reducción de una determinante á otra equivalente que tenga iguales los elementos de una fila ó los de una columna.

Sea, por ejemplo, la determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

que se desea transformar en otra equivalente que tenga iguales todos los elementos de la 2.ª columna. Basta para el efecto *multiplicar todos los elementos de cada fila por el producto de los demás elementos de la 2.ª columna.* De este modo todos los elementos de la 2.ª columna serán iguales al producto de los elementos de esa misma columna. Para que la determinante no se altere habrá que poner fuera de barras, como divisores, los factores por que sucesivamente se multiplicarán las filas. Considerando el ejemplo propuesto

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{5\times2\times1\times3\times2\times1\times3\times5\times1\times3\times5\times2}$$

$$\begin{vmatrix} 2\times5\times2\times1 & 3\times5\times2\times1 & 5\times5\times2\times1 & 4\times5\times2\times1 \\ 4\times3\times2\times1 & 5\times3\times2\times1 & 7\times3\times2\times1 & 6\times3\times2\times1 \\ 1\times3\times5\times1 & 2\times3\times5\times1 & 3\times3\times5\times1 & 5\times3\times5\times1 \\ 5\times3\times5\times2 & 1\times3\times5\times2 & 2\times3\times5\times2 & 3\times3\times5\times2 \end{vmatrix}$$

Cuando los elementos de la fila ó de la columna que se quiere igualar tienen factores comunes, se halla el mínimo común múltiplo de los elementos de esa fila ó columna, se multiplica cada columna ó fila por el cociente que resulta de dividir el m. c. m. por cada elemento de la columna ó fila, poniendo fuera de barras como divisores los factores por los cuales se multiplicó la determinante.

Antes de aplicar esta regla conviene poner en evidencia fuera de barras los factores comunes.

Sea, por ejemplo, la determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}$$

que se desea transformar en otra equivalente que tenga iguales los elementos de la 4.ª fila.

Observamos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

y como el m. c. m. de los elementos de la 4.ª fila es 12, bastará: multiplicar la 1.ª columna por 12 : 1, la 2.ª por 12 : 2, la 3.ª por 12 : 3 y la 4.ª por 12 : 4, y obtendremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{12 \times 6 \times 4 \times 3} \begin{vmatrix} 12 & 30 & 36 & 39 \\ 12 & 18 & 20 & 21 \\ 36 & 42 & 44 & 45 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{vmatrix}$$

Luego podemos escribir

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = \frac{2 \times 4}{12 \times 6 \times 4 \times 3} \begin{vmatrix} 12 & 30 & 36 & 39 \\ 12 & 18 & 20 & 21 \\ 36 & 42 & 44 & 45 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{vmatrix}$$

que tiene iguales los elementos de la 4.ª fila.

NOTA. — Obsérvese la analogía que hay entre los procedimientos indicados y los que se emplean para reducir quebrados á común denominador.

2.ª TRANSFORMACIÓN

Reducción de una determinante á otra equivalente en que todos los elementos de una fila ó de una columna sean iguales á 1.

Basta primero hacer iguales los elementos de la fila ó columna por

la transformación anterior y sacar como factor fuera de barras el elemento común á la fila ó columna.

Ejemplo: Sea la determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

que se quiere transformar en otra equivalente que tenga todos los elementos de la 3.ª columna iguales á 1.

Igualamos primeramente todos los elementos de la 3.ª columna, por el m. c. m. que es 12, multiplicando sucesivamente las filas por 1, 3, 4 y 6, teniendo cuidado de sacar fuera de barras los divisores correspondientes, y resultará:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{1\times3\times4\times6} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 1 \\ 9 & 12 & 12 & 6 \\ 20 & 0 & 12 & 16 \\ 6 & 12 & 12 & 18 \end{vmatrix} = \frac{12}{3\times4\times6} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 & 1 \\ 9 & 12 & 1 & 6 \\ 20 & 0 & 1 & 16 \\ 6 & 12 & 1 & 18 \end{vmatrix}$$

El último miembro lo hemos obtenido poniendo fuera de barras el factor 12 común en la 3.ª columna.

26. Simplificación de determinantes. — Después de las transformaciones anteriores resultan factores comunes en algunas filas ó columnas; estos factores comunes conviene sacarlos fuera de barras para simplificarlos con los divisores.

Así, tomando el ejemplo anterior, llegamos á la igualdad

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{12}{3\times4\times6} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 & 1 \\ 9 & 12 & 1 & 6 \\ 20 & 0 & 1 & 16 \\ 6 & 12 & 1 & 18 \end{vmatrix} = \frac{12\times4}{3\times4\times6} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 13 & 1 & 6 \\ 20 & 0 & 1 & 16 \\ 6 & 3 & 1 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 6 \\ 20 & 0 & 1 & 16 \\ 6 & 3 & 1 & 18 \end{vmatrix}$$

27. Determinantes menores. — *Se llama determinante menor de una determinante dada, la formada por los elementos que quedan cuando se suprimen en ésta un número de filas é igual número de columnas.*

Orden de una determinante menor es el número de filas ó de columnas suprimidas en la principal para obtener la menor. — Según esto las determinantes menores que se obtienen suprimiendo una fila y una columna, son de 1.er orden; las que se obtienen suprimiendo dos filas y dos columnas son de 2.° orden, y así sucesivamente.

De la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

podemos obtener **nueve** determinantes menores de 1.er orden; suprimiendo la 1.ª columna y la 1.ª fila resulta

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 ; \end{vmatrix}$$

suprimiendo la 3.ª fila y la 2.ª columna resulta

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \&$$

28. Notación de las determinantes menores de 1.er orden. Para indicar una determinante menor de 1.er orden emplearemos la letra Δ acompañada del elemento común á la fila y columna suprimida encerrado entre paréntesis. Así en la determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{tendremos}$$

$$\Delta (c_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

que es la determinante menor de 1.er orden obtenida suprimiendo la 3.ª fila y la 3.ª columna, que son las que tienen común el elemento c_3. En la misma determinante, Δ (b_4) representa la determinante menor de 1.er orden que se obtiene suprimiendo la fila y la columna que tiene común el elemento b_4; luego

$$\Delta [b_4] = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d^1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Una determinante da lugar á tantas determinantes menores de 1.er orden como elementos contiene su matriz.

29. Complemento de un elemento. — La determinante menor de 1.er orden que se obtiene suprimiendo la fila y la columna común á un elemento dado, se llama *determinante menor complementaria* de ese elemento; para abreviar la llamaremos *complemento* del elemento considerado.

Según esto, $\Delta\,[\,c_3\,]$ es el complemento del elemento c_3, $[\,\Delta\,a_4\,]$ es el complemento de a_4. No hay que olvidar que si

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta\,[\,c_3\,] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\text{y } \Delta\,[a_4\,] = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

30. Teorema. — *Si en una determinante todos los elementos de una columna ó de una fila son nulos á excepción del 1.°, la determinante será igual á este elemento multiplicado por su complemento, precedido el producto del signo + ó —, según que la fila considerada ocupe lugar impar ó par.*

Supongamos que consideramos la 1.ª fila, y todos sus elementos son nulos á excepción del 1.°

Sea la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & o & o & o \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

y vamos á demostrar que es igual á $a_1\ \Delta\,[\,a_1\,]$, ó lo que es igual, á

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

En efecto. Cada término de la determinante debe contener un elemento de cada fila y uno de cada columna (20); luego todos los términos de la determinante propuesta se anularán, á excepción de los que tengan a_1; de modo que a_1 será factor común de todos los términos de la determinante que no son nulos, y no pudiendo éstos contener ningún elemento de la 1.ª columna, a_1 multiplicará al conjunto de términos que se pueden formar con los elementos restantes

$$\begin{matrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{matrix}$$

permutados de todas maneras posibles; es decir, que

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

2.° Consideremos ahora una fila cualquiera. Este caso puede reducirse al anterior, permutando sucesivamente esa fila con su inmediata superior hasta llevarla á ser la primera: cada permutación originará un cambio de signo, ó lo que es igual, una multiplicación por -1; luego, si para llevar la fila al primer lugar hay que hacer p permutaciones, habrá que multiplicar p veces por -1, ó sea por $(-1)^p$; luego cambiará el signo si el número p es impar, que equivale á decir si la fila ocupa lugar par, y no cambiará si la fila ocupa lugar impar. Así la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

NOTA. — Aunque hemos hecho el razonamiento con respecto á filas, es evidente que el mismo razonamiento se aplica á las columnas.

El teorema (30) conviene enunciarlo de una manera más general diciendo: *Si en una determinante todos los elementos de una fila ó de una columna son nulos á excepción de uno, la determinante será igual á dicho elemento multiplicado por su complemento y precedido el producto del signo + ó del signo —, según que el elemento pertenezca á fila y columna de la misma paridad, ó de diferente paridad.*

Como ejercicio dejamos á cargo del estudiante la demostración de este enunciado general, consecuencia inmediata de la anterior.

Descomposición de una determinante.

31. TEOREMA. — *Toda determinante es la suma algebraica de los productos de los elementos de una misma fila ó columna por sus respectivos complementos, afectando cada producto con el signo + ó —, según que el elemento pertenezca á columna y fila de la misma ó distinta paridad.*

Sea la determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad (M)$$

Supongámosla desarrollada, y ordenados sus términos con respecto á los elementos de la 1.ª fila y llamemos al polinomio resultante (M) $\triangle = A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 + D_1 d_1$; haciendo $b_1 = c_1 = d_1 = o$; el 1.er miembro $\triangle$ se transforma en $a_1 \triangle(a_1)$ y el 2.º en $A_1 a_1$; luego $a_1 \triangle(a_1) = a_1 A_1$, luego $A_1 = \triangle(a_1)$; haciendo $a_1 = c_1 = d_1 = o$; el 1.er miembro de (M) se transforma en $- b_1 \triangle(b_1)$ y el 2.º en $B_1 b_1$, luego $- b_1 \triangle(b_1) = B_1 b_1$, luego $B_1 = - \triangle(b_1)$; haciendo $a_1 = b_1 = d_1 = o$, resulta $C_1 = \triangle(c_1)$; y haciendo $a_1 = b_1 = c_1 = o$, resulta $D_1 = - \triangle(d_1)$. Luego $\triangle = a_1 \triangle(a_1) - b_1 \triangle(b_1) + c_1 \triangle(c_1) - d_1 \triangle(d_1)$, ó lo que es igual

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \triangle(a_1) - b_1 \triangle(b_1) + c_1 \triangle(c_1) - d_1 \triangle(d_1)$$

NOTA. — Aunque para más sencillez hemos hecho la demostración con respecto á la 1.ª fila, el teorema puede demostrarse para una fila cualquiera: basta, en efecto, llevar esa fila al primer lugar, cambiando ó no de signo á la determinante, según que la fila ocupe lugar par ó impar, y repetir después la demostración anterior.

Ejemplo. — Sea la determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & c_5 \end{vmatrix}$$

y vamos á demostrar que

$$\triangle = a_4 \triangle (a_4) - b_4 \triangle (b_4) + c_4 \triangle (c_4) - d_4 \triangle (d_4) + e_4 \triangle (e_4)$$

En efecto

$$-\triangle = \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = \triangle'$$

pero $\triangle'$ desarrollado por los elementos de la 1.ª fila nos da

$\triangle' = a_4 \triangle [a_4] - b_4 \triangle [b_4] + c_4 \triangle [c_4] - d_4 \triangle [+ d_4 \; e_4 \triangle [e_4]$ luego

$$\triangle = a_4 \triangle [a_4] + b_4 \triangle [b_4] - c_4 \triangle [c_4] + d_4 \triangle [d_4] - e_4 \triangle [e_4]$$

Vemos, pues, que el principio es general.

De lo expuesto resulta que toda determinante se puede descomponer en tantas determinantes de grado inmediato inferior como unidades tenga el grado de la 1.ª Claro es que por descomposiciones sucesivas puede llegarse á expresar una determinante cualquiera por un polinomio algebraico ordinario.

Cuando se descompone una determinante en la forma que acabamos de indicar, se dice que se desarrolla la determinante.

Conviene ejercitarse en los desarrollos de determinantes; al efecto consideremos la determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$ que desarrollaremos por los elementos de la 2.ª fila.

Según el teorema [31] podemos establecer

$$[M] \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollaremos ahora cada una de estas determinantes:

La 1.ª por los elementos de la 2.ª fila $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \times 2 + 4 \times 5 = -2 + 20 = 18$

La 2.ª por los elementos de la 1.ª columna $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 2 = 12 - 4 = 8$

La 3.ª por los elementos de la 2.ª fila $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 5 + 1 \times 3 \; - 10 + 3 = -7$

y sustituyendo en

$$[M]\ \begin{vmatrix} 3\,5\,2 \\ 1\,2\,2 \\ 2\,1\,4 \end{vmatrix} = -1 \times 18 + 2 \times 8 - 3 \times -7 = -18 + 16 + 21 = 19$$

Nota. — Antes de proceder al desarrollo de una determinante conviene poner fuera de barras los factores comunes.

Vamos ahora á desarrollar la última determinante, reduciéndola antes á otra equivalente que tenga una fila ó una columna cuyos elementos sean todos iguales á 1; para esto conviene elegir la fila 3.ª, porque da lugar á empleo de factores más pequeños, pues siendo 4 el m. c. m. de sus elementos, basta multiplicar la 1.ª columna por 2, la 2.ª por 4, y la 3.ª por 1. Así

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2 \times 4} \begin{vmatrix} 6 & 20 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{2 \times 4}{2 \times 4} \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3\,1 \\ 2\,3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= |\,(30 - 8) - (9 - 2) + (24 - 20)\,| = (22 - 7 + 4) = 19$$

Ejemplo I. — Desarrollar

$$\triangle = \begin{vmatrix} 4\ 3\ 1\ 2 \\ 0\ 2\ 3\ 1 \\ 4\ 0\ 2\ 3 \\ 1\ 4\ 0\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\triangle = -\begin{vmatrix} 3\ 1\ 2 \\ 2\ 3\ 1 \\ 0\ 2\ 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4\ 1\ 2 \\ 0\ 3\ 1 \\ 4\ 2\ 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4\ 3\ 1 \\ 0\ 2\ 3 \\ 4\ 0\ 2 \end{vmatrix} \quad (30)$$

Desarrollando cada una de las menores resultantes:

$$\begin{vmatrix} 3\ 1\ 2 \\ 2\ 3\ 1 \\ 0\ 2\ 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3\ 2 \\ 2\ 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3\ 1 \\ 2\ 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} = -2(3 \times 1 - 2 \times 2) + 3(3 \times 3 - 2 \times 1) \\ = -2(2-4) + 3(9-2) = 2 + 21 = 23 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4\ 1\ 2 \\ 0\ 3\ 1 \\ 4\ 2\ 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4\ 2 \\ 4\ 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4\ 1 \\ 4\ 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 3(4 \times 3 - 4 \times 2) - (4 \times 2 - 1 \times 4) = \\ 3(12 - 8) - (8 - 4) = 3 \times 4 - 4 = 8 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (4 \times 2 - 1 \times 4) - 3 (4 \times 0 - 12 =$$

$$2 (8 - 4) - 3 (0 - 12) = 2 \times 4 - 3 \times - 12 = 8 + 36 = 44$$

Luego

$$\triangle = - 23 + 4 \times 8 + 2 \times 44 = - 23 + 32 + 88 = 97$$

Ejemplo II. — Desarrollar

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} c & d & a \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & c & d \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ a & b & c \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ d & a & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c & d & a \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} d & a \\ b & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} d & a \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= c (a c - b^2) - d (c d - a b) + a (b d - a^2)$$

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} c & d \\ b & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= b (a c - b^2) - d (c^2 b d) + a (b c - a d)$$

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ a & b & c \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} d & a \\ b & c \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} c & d \\ b & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} c & d \\ d & a \end{vmatrix}$$

$$= b (c d - a b) - c (c^2 b d) + a (a c - d^2)$$

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ d & a & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} d & a \\ a & b \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} c & d \\ d & a \end{vmatrix} =$$

$$= b (b d - a^2) - c (b c - a d) + d (a c - d^2)$$

Luego

$$\triangle = a\,c\,(a\,c - b^2) - a\,d\,(c\,d - a\,b) + a^2\,(b\,d - a^2)$$
$$- b^2\,(a\,c - b^2) + b\,d\,(c^2\,b\,d) - a\,b\,(b\,c - a\,d)$$
$$+ b\,c\,(c\,d - a\,b) - c^2\,(c^2\,b\,d) + a\,c\,(a\,c - d^2)$$
$$- b\,d\,(b\,d - a^2) + c\,d\,(b\,c - a\,d) - d^2\,(a\,c - d^2)$$

ó $\triangle = (ac-b^2)(ac-b^2) - (bd-a^2)(bd-a^2) - (bd-c^2)(bd-c^2)$
$+ (ac-d^2) - (ac-d^2) + (cd-ab)(bc-ad) + (bc-ad)(bd-ab)$

ó $\triangle = (a\,c - b^2)^2 - (b\,d - a^2)^2 - (b\,d - c^2)^2 + (a\,c - d^2)^2$
$$+ 2\,(c\,d - a\,b)\,(b\,c - a\,d)$$

Ejemplo III. — Desarrollar

$$\triangle = \begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix}$$

$$\triangle = - \begin{vmatrix} -1 & \cos A \\ \cos A & -1 \end{vmatrix} - \cos C \begin{vmatrix} \cos C & \cos B \\ \cos A & -1 \end{vmatrix} + \cos B \begin{vmatrix} \cos C & \cos B \\ -1 & \cos A \end{vmatrix}$$
$$= -(1 - \cos^2 A) - \cos C\,(-\cos C - \cos A \cos B) + \cos B$$
$$(\cos A \cos C + \cos B)$$
$$= -1 + \cos^2 A + \cos^2 C + \cos A \cos B \cos C + \cos A \cos B \cos C + \cos^2 B$$

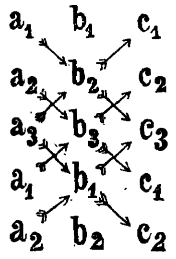
que igualada á O da una relación conocida en Trigonometría.

32. Regla de Sarrus. — Sarrus dió una regla muy sencilla para desarrollar rápidamente las determinantes de 3.er grado. Consiste en lo siguiente:

Dada la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

se repiten debajo de la 3.ª *fila sucesivamente la* 1.ª *y la* 2.ª, resultando así las 5 filas:



se escriben los 3 productos que resultan de multiplicar los 3 elementos en diagonal de arriba abajo y de izquierda á derecha, y los 3 productos que se obtienen multiplicando los 3 elementos en diagonal de sentido contrario; se da á los 3 primeros productos el signo + y á los 3 últimos el signo —; el conjunto de los 6 términos forma el desarrollo de la determinante.

Ejemplo. — Desarrollar por la regla de Sarrus la determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} = 1 \times 2 \times 2 + 0 \times 0 \times 4 + 1 \times 2 \times 3 \\ - 0 \times 2 \times 2 - 1 \times 0 \times 3 - 1 \times 2 \times 4 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \quad = 4 + 6 - 8 = 2$$

Nota. — Para aplicar la regla de Sarrus á determinantes de grado superior al 3.°, es necesario ante todo descomponer la determinante propuesta en determinantes menores de 3.er grado.

Ejemplo. — Desarrollar por la regla de Sarrus la determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} - \begin{array}{|ccc|} 6 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 6 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} + \begin{array}{|ccc|} 6 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 6 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \end{array} - \begin{array}{|ccc|} 6 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \hline 6 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \end{array}$$

$$=[0\times3\times1+1\times0\times1+3\times4\times5-1\times4\times1-0\times0\times5-3\times3\times1]$$
$$-[6\times3\times1+1\times0\times8+3\times4\times5-1\times4\times1-6\times0\times5-3\times3\times8]$$
$$+[6\times4\times1+0\times0\times8+3\times4\times1-0\times4\times1-6\times0\times1-3\times4\times8]$$
$$-[6\times4\times1+0\times3\times8+1\times4\times1-0\times4\times1-6\times3\times1-1\times4\times8]$$
$$=[60-4-9]-[18+60-4-72]+[24+12-96]-24+4\ -18-32]$$
$$=47-2-60+22=69-62=7$$

33. TEOREMA.—*La suma de los productos de cada uno de los elementos de una columna ó fila, por las determinantes menores complementarias de otra columna ó fila, es nula.*

Sabemos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \triangle (a_1) + a_2 \triangle (a_2) + a_3 \triangle (a_3) + a_4 \triangle (a_4)$$

reemplazando en la igualdad a_1, a_2, a_3 . . por c_1 c_2 c_3 . . . resulta

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = c_1 \triangle (a_1) + c_2 \triangle (a_2) + c_3 \triangle (a_3) + c_4 \triangle (a_4) \text{ ó}$$

$$o = c_1 \triangle (a_1) + c_2 \triangle (a_2) + c_3 \triangle (a_3) + c_4 \triangle (a_4)$$

TEOREMA. — *La suma de dos determinantes del mismo grado que sólo difieren en una fila ó en una columna, es otra determinante del mismo grado que tiene las filas ó columnas comunes: las no comunes están reemplazadas por una fila ó columna cuyos términos son respectivamente suma de las correspondientes de las filas ó columnas no comunes.*

Sean las determinantes

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ y } \triangle' = \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

desarrollándolas por los elementos de la columna no común, que es la 1.ª

$\Delta = a_1 \Delta(a_1) + a_2 \Delta(a_2) + a_3 \Delta(a_3)$ | $\Delta(a_1) = \Delta(x_1)$

$\Delta' = x_1 \Delta(x_1) + x_2 \Delta(x_2) + x_3 \Delta(x_3)$ pero | $\Delta(a_2) = \Delta(x_2)$

luego $\Delta' = x_1 \Delta(a_1) + x_2 \Delta(a_2) + x_3 \Delta(a_3)$ | $\Delta(a_3) = \Delta(x_3)$

y sumando ordenadamente la 1.ª igualdad con la 3.ª

$$\Delta + \Delta' = (a_1) + x_1) \Delta (a_1) + (a_2 + x_2) \Delta a_2 + (a_3 + x_3) \Delta a_3)$$

ó sea

$$\Delta + \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 + a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 + a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

NOTA. — Por medio del Teorema anterior se puede descomponer una determinante en dos ó más del mismo grado, descomponiendo en dos ó más sumandos los elementos de una misma fila ó columna.

Ejemplo
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Descomponer las determinantes en otras del mismo grado y de modo que una de ellas tenga los elementos de la 3.ª columna iguales á la unidad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

35. TEOREMA. — *Si los elementos de una columna ó fila son sumas de equimúltiplos de los elementos correspondientes de otras columnas ó filas, la determinante es nula.*

Sea la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{en que} \quad \begin{aligned} a_1 &= m\,c_1 + n\,d_1 \\ a_2 &= m\,c_2 + n\,d_2 \\ a_3 &= m\,c_3 + n\,d_3 \\ a_4 &= m\,c_4 + n\,d_4 \end{aligned}$$

$$\text{será} \begin{vmatrix} m\,c_1 + n\,d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ m\,c_2 + n\,d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ m\,c_3 + n\,d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ m\,c_4 + n\,d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m\,c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ m\,c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ m\,c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ m\,c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n\,d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ n\,d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ n\,d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ n\,d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= m \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = m \times o + n \times o = o$$

36. TEOREMA. — *Una determinante no varía cuando se agregan á cada elemento de una fila ó de una columna equimúltiplos de los elementos correspondientes de otras filas ó columnas.*

Sean las determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 + m\,b_1 + n\,c_1 & b_1 & + c_1 \\ a_2 + m\,b_2 + n\,c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + m\,b_3 + n\,c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ;$$

Son iguales; pues su diferencia es

$$\begin{vmatrix} m\,b_1 + n\,c_1 & b_1 & c_1 \\ m\,b_2 + n\,c_2 & b_2 & c_2 \\ m\,b_3 + n\,c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = o$$

37. CÁLCULO RÁPIDO DE LAS DETERMINANTES NUMÉRICAS. — La práctica en el cálculo de las determinantes permite abreviar mucho las operaciones necesarias para obtener el valor de una propuesta. No es posible sujetar á reglas generales los procedimientos que deben seguirse para acelerar el cálculo, pues dependen de los casos que se presentan, cuya variedad es ilimitada; pero hay algunos preceptos que deben tenerse presentes y que son de utilidad, pues bien aplicados conducen á notables simplificaciones.

Estos preceptos son:

1.ª *Simplifíquese la determinante poniendo fuera de barras los factores que sean comunes á los elementos de cada fila ó de cada columna.*

2.ª *Transfórmese la determinante en otra equivalente en que los elementos de una fila ó de una columna son iguales á 1.*

3.ª *Réstense de los elementos de una columna ó de una fila respectivamente los elementos correspondientes de todas las demás, á fin de transformar la determinante en otra equivalente que tenga todos los*

elementos de una fila ó de una columna iguales á 0, menos uno; entonces la determinante equivaldrá á otra de grado inferior en una unidad.

Apliquemos estos preceptos á los siguientes ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6\times 2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 24 & 18 & 24 & 6 \\ 4 & 10 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 24 & 18 & 24 & 1 \\ 4 & 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 20 & 15 & 22 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 20 & 15 & 22 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 20 & 22 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{7}{2}(22+60) = 7\times 41 = 287$$

Nota. — El alumno debe desarrollar la determinante por los métodos ordinarios, á fin de que pueda darse cuenta de las abreviaciones que se consiguen siguiendo el procedimiento indicado.

Ejemplo II:

$$\begin{vmatrix} 25 & 15 & 10 & 20 \\ 12 & 6 & 3 & 5 \\ 20 & 9 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 12 & 2 & 3 & 5 \\ 20 & 3 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -15 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +15 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = +15(-3-6)$$

$$= -135.$$

Ejercicios para resolver

En los determinantes que siguen, cambiar las líneas en columnas y viceversa:

$$1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad 2 \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad 3 \begin{vmatrix} 11 & 8 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} \quad 4 \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

$$5\ \begin{vmatrix} m & 4 & n \\ 5 & n & p \\ 6 & p & m \end{vmatrix} \quad 6\ \begin{vmatrix} 9 & 6 & 10 & 7 \\ 8 & 13 & 12 & 6 \\ 14 & 10 & 9 & 16 \\ 18 & 11 & 8 & 15 \end{vmatrix} \quad 7\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

En los ejemplos que siguen, poner por primera línea ó por primera columna aquellas cuyos elementos están subrayados, é indicar si la operación conduce á cambiar de signo.

$$8\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ \mathit{d} & \mathit{e} & \mathit{f} \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad 9\ \begin{vmatrix} a, & b, & c, \\ 5 & 6 & 7 \\ \mathit{a_2} & \mathit{b_2} & \mathit{c_2} \end{vmatrix} \quad 10\ \begin{vmatrix} x, & \mathit{y}, & z \\ x_2 & \mathit{y_2} & z_2 \\ x_3 & \mathit{y_3} & z_3 \end{vmatrix} \quad 21\ \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x & \mathit{cos}\ y \\ \cos y & \cos x & \mathit{sen}\ x \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Por cambios convenientes de líneas y columnas poner al principio del determinante el elemento subrayado é indicar el signo del determinante modificado.

$$12\ \begin{vmatrix} x. & y \\ \mathit{x_2} & y_2 \end{vmatrix} \quad 13\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a & \mathit{b} \end{vmatrix} \quad 14\ \begin{vmatrix} 8 & \mathit{7} \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \quad 15\ \begin{vmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 6 & \mathit{5} & 10 \\ 4 & 11 & 8 \end{vmatrix}$$

$$16\ \begin{vmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 6 & 8 & 10 \\ \mathit{11} & 12 & 13 \end{vmatrix} \quad 17\ \begin{vmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 6 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & \mathit{1} \end{vmatrix} \quad 18\ \begin{vmatrix} m & \mathit{3} & n \\ n & 5 & p \\ p & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

En los ejemplos siguientes escribir fuera de rayas los factores comunes.

$$19\ \begin{vmatrix} m_3 & m \\ n_2 & n_3 \end{vmatrix} \quad 20\ \begin{vmatrix} mn_2 & px^3 \\ mn^3 & px^2 \end{vmatrix} \quad 21\ \begin{vmatrix} 6a^2 & 24b \\ 10a^2 & 30b_2 \end{vmatrix}$$

$$22\ \begin{vmatrix} 15 & 24 \\ 45 & 18 \end{vmatrix} \quad 23\ \begin{vmatrix} 18 & 30 \\ 20 & 50 \end{vmatrix} \quad 24\ \begin{vmatrix} 3\frac{1}{2} & 2\frac{1}{4} \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \quad 25\ \begin{vmatrix} 2\frac{6}{7} & 2\frac{8}{21} \\ 5\frac{5}{6} & 4\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$26\ \begin{vmatrix} 30 & 24 & 6 \\ 36 & 54 & 18 \\ 42 & 28 & 14 \end{vmatrix} \quad 27\ \begin{vmatrix} 15 & 24 & 33 \\ 20 & 32 & 44 \\ 35 & 56 & 77 \end{vmatrix}$$

En los ejemplos siguientes simplificar el determinante si es posible y hacer positivo el término principal:

$$28\ \begin{vmatrix} 6x & 18y \\ 12x^2 & -27y^3 \end{vmatrix} \quad 29\ \begin{vmatrix} -10 & 24 \\ 30 & 36 \end{vmatrix} \quad 30\ \begin{vmatrix} 10x & 4y & 6z \\ 20x^2 & -8y^2 & 30z^2 \\ 70a & 32b & 18c \end{vmatrix}$$

En los ejemplos siguientes modificar los determinantes de modo que se tenga la unidad en toda una línea ó columna y sacar los factores comunes si los hubiere :

$$31\ \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \quad 32\ \begin{vmatrix} x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \\ xy & a^3 & b^3 \end{vmatrix} \quad 33\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 7 \\ 16 & 6 & 15 \end{vmatrix}$$

$$34\ \begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ acd & b & b^2 & b^3 \\ abd & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \quad 35\ \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad 36\ \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 & 5x^3 & x^4 \\ y & 12y^2 & \frac{1}{2}y^3 & y^4 \\ z & z^2 & 5z^3 & 4z^4 \\ 4u & u^2 & u^3 & 3u^4 \end{vmatrix}$$

Hallar si en los determinantes siguientes hay algunos que se reduzcan á cero:

$$37\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad 38\ \begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 39 & 21 \end{vmatrix} \quad 39\ \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 9 \\ \sqrt{18} & 27 \end{vmatrix} \quad 40\ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$$

$$41\ \begin{vmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 15 & 5 & 1 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} \quad 42\ \begin{vmatrix} 3 & x^m & 1 \\ 2 & x^{m+2} & x^2 \\ 7 & x^{m+4} & x^4 \end{vmatrix} \quad 43\ \begin{vmatrix} n & x^{m-1} & \frac{1}{x} \\ p & x^m & 1 \\ q & x^{m+1} & x \end{vmatrix}$$

$$44\ \begin{vmatrix} \frac{1}{\sec a} & \cos^2 a \\ \sec a & \cos a \end{vmatrix} \quad 45\ \begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 14 & 56 \end{vmatrix}$$

Descomponer los determinantes siguientes en la suma de otros dos del mismo grado:

$$46\ \begin{vmatrix} m_1 + 1 & x_1 & y_1 \\ m_2 + 2 & x_2 & y_2 \\ m_3 + 3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad 47\ \begin{vmatrix} a & a_1 + x_1 & a_2 \\ b & b_1 + y_1 & b_2 \\ c & c_1 + z_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$48\ \begin{vmatrix} a_1 + x & b_1 + x^2 & c_1 + x^3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad 49\ \begin{vmatrix} a_1 + \alpha & x_1 + \beta & y_1 + m \\ a_2 & x_2 & y_2 \\ a_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$50\ \begin{vmatrix} 9 - a^4 & b^4 & c^4 \\ 11 - a^2 & b^2 & c^2 \\ 13 - a & b & c \end{vmatrix} \quad 51\ \begin{vmatrix} x_1 + a_1 - 5 & y_1 & z_1 \\ x_2 + a_2 - 6 & y_2 & z_2 \\ x_3 + a_3 - 7 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Reunir en uno solo los determinantes siguientes:

52 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 53 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 54 $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$

54 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 55 $\begin{vmatrix} a_1 & 3 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & 4 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & 3 & c_1 \\ m & n & p \\ a_3 & 4 & c_3 \end{vmatrix}$

Calcular los determinantes siguientes:

56 $\begin{vmatrix} 14\frac{2}{5} & 43\frac{1}{5} \\ 7\frac{1}{12} & 11\frac{1}{4} \end{vmatrix}$ 57 $\begin{vmatrix} \frac{2}{3}a & \frac{3}{5}b \\ \frac{1}{4}x & \frac{4}{7}y \end{vmatrix}$ 59 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix}$

60 $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ 61 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ 62 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ 63 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & b \\ -1 & 0 & a \\ A & B & C \end{vmatrix}$

64 $\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 \\ 0 & a^4 & b^4 \\ 1 & a^6 & b^6 \end{vmatrix}$ 65 $\begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix}$ 66 $\begin{vmatrix} m & x & y \\ m^2 & x^2 & y^2 \\ mn & x^3 & y^3 \end{vmatrix}$ 67 $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 & 7 \\ 5 & 4 & 11 & 13 \\ 9 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

68 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$ 69 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^3 & 2b & c^4 & 2 \\ a^4 & 5 & 0 & d^4 \\ 3 & b^3 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$ 70 $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & a & a^2 \\ y & xy & a^3 & z \\ a^2 & z & y2 & 2 \\ a & x^2 & z & 1 \end{vmatrix}$

71 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & c \\ 1 & b & c & -1 \end{vmatrix}$ 72 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

CAPITULO III

Elevación á potencias

Definición. — Elevar á potencias una cantidad es tomarla tantas veces por factor, como indica su exponente (1).

La elevación á potencias es según esto un caso particular de la multiplicación. Por eso es que en ésta ya se han estudiado algunos resultados de elevación á potencias de ciertas cantidades.

Dada, sin embargo, la importancia de la teoría y la frecuencia con que se aplican sus principios, conviene conocerla de un modo más completo y extenso.

Podemos distinguir tres casos: *1.° elevar á potencias un monomio; 2.° elevar á potencias un binomio y 3.° elevar á potencias un polinomio.*

PRIMER CASO. — *Elevar á potencias un monomio.*

Sea, por ejemplo, $(3a^2b^3c)^3$.

Por definición de potencia y por multiplicación tenemos:

$$(3a^2b^3c)^3 = 3a^2b^3c \times 3a^2b^3c \times 3a^2b^3c = 27a^6b^9c^3$$

Sea $(Ab^mC^n)^2$

Por definición tenemos:

$(Ab^mc^n)^2 = Ab^mc^n \times Ab^ml^n \times Ab^ml^n \times \ldots\ldots r$ veces ó $(Ab^mc^n) = A^rb^{mr}c^{nr}$, de lo que deducimos la siguiente

REGLA PARA ELEVAR UN MONOMIO Á UNA POTENCIA. *Se eleva á la misma el coeficiente y se multiplican los exponentes por el índice de aquélla.*

COROLARIO. *La potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo grado de los factores.*

(1) Esta definición sólo se refiere al caso de que el exponente sea entero y positivo (que es el que únicamente consideramos en este capítulo) y no comprende, por consiguiente, á los exponentes negativos y fraccionarios. Si quisiéramos definir la potencia de un modo general, diríamos: *potencia de una cantidad es otra que se forma respecto de la primera considerada como factor ó divisor, del mismo modo que su exponente está formado con respecto á la unidad positiva ó negativa, considerada como sumando.*

2.° CASO. *Elevar á potencias un binomio* (1). Para obtener la potencia de un binomio examinemos antes la ley de formación de un producto de varios factores binomios cuyos primeros términos son iguales.

$$(x+a)(x+b)=x^2+\left.\begin{matrix}a\\+b\end{matrix}\right| x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\left.\begin{matrix}a\\+b\\+c\end{matrix}\right| x^2+\left.\begin{matrix}ab\\+ac\\+bc\end{matrix}\right| x+abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+\left.\begin{matrix}a\\+b\\+c\\+d\end{matrix}\right| x^3+\left.\begin{matrix}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{matrix}\right| x^2+\left.\begin{matrix}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{matrix}\right| x+abcd$$

Si observamos estos resultados, vemos que sus términos están sujetos á la siguiente ley: el exponente de x en el primer término es igual al número de los factores que se multiplican; que dicho exponente va disminuyendo una unidad hasta el último término. Se observa también que el coeficiente del primer término es la unidad; que el del segundo término es la suma de los productos binarios de los segundos términos; que el del tercero es la suma de los productos ternarios, etc., y que, en fin, el último término de cada resultado es el producto de los segundos términos de los binomios.

Vamos á demostrar que esta ley es general; y para esto nos bastará probar que si se verifica para m factores, se verificará también para $m+1$, pues en este caso, siendo aplicable á un producto de tres factores, lo será á uno de cuatro; siendo á uno de cuatro, lo será á uno de cinco, y así sucesivamente.

Sea el producto de m factores binomios obtenido en esa forma y que representaremos por $x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+P_3x^{m-3}+\ldots P_{m-1}$ en el cual

$$\begin{aligned}&P_1=a+b+c+\ldots\ldots\\&P_2=ab+ac+ad+\ldots\ldots\ldots\\&P_3=abc+abd+acd+\ldots\ldots\\&\vdots\\&P_{m-1}=abcd\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

(1) Si bien la fórmula del binomio no la exige el programa de Ampliación, creemos útil incluírla, aunque de un modo muy elemental, en este capítulo.

Multipliquemos este producto por un nuevo factor $x+l$ y tendremos:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\multicolumn{4}{l}{x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+P_3x^{m-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots P^{m-1}} \\
\multicolumn{4}{l}{x+l} \\
\hline
x^{m+1}+P_1 & x^m+P_2 & x^{m-1}+P_3 & x^{m-2}+\ldots\ldots\ldots lP^{m-1} \\
\quad +l & \quad +lP_1 & \quad +lP_2 &
\end{array}$$

En donde vemos plenamente confirmada la ley anunciada, pues el exponente del primer término es igual al número de factores que se multiplican y dicho exponente va disminuyendo de unidad en unidad; en cuanto á los coeficientes, el primero es la unidad, el segundo es P_1+l, ó lo que es lo mismo, la suma de los segundos términos de los binomios; el tercero es P_2+lP_1, ó lo que es lo mismo, la suma de los productos binarios de los segundos términos, puesto que $P_2+lP_1=ab+ac+ad+\ldots\ldots la+lb+lc+\ldots\ldots$ son todas las combinaciones binarias que pueden hacerse con $a, b, c, d\ldots\ldots l$.

Del mismo modo vemos que P_3+CP_2 es la suma de los productos ternarios y así sucesivamente; luego la ley de que nos ocupamos es general. Demostrada la generalidad de esta ley, fácil nos será deducir de ella la regla para elevar un binomio á una potencia cualquiera.

En efecto: si en el producto que acabamos de obtener hacemos $a=b=c=\ldots\ldots$ tendremos:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
(x+a)(x+b)(x+c)\ldots=x^m+a & x^{m-1}+aa & x^{m-2}+aaa & x^{m-3}+\ldots aaa\ldots \\
+a & +aa & +aaa & \\
+a & +aa & +aaa & \\
+\vdots & +\ldots & +\ldots & \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Pero si se tiene presente que a está repetida tantas veces como factores hay, que $a\,a$ está repetida tantas veces como combinaciones binarias se pueden hacer con m elementos, que $a\,a\,a$ tantas veces como combinaciones ternarias, etc., tendremos que escribir este resultado en la forma siguiente:

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+C_2{}^ma^2x^{m-2}+C_3{}^ma^3x^{m-3}+\ldots a^m$$

ó

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}$$
$$+\ldots\ldots a^m \quad (\text{N.}^\circ\ 19)$$

de cuya fórmula, llamada de Newton, observando la homogeneidad de sus términos y fijándonos en la relación que guardan dos coeficientes consecutivos, deducimos la siguiente

REGLA PARA ELEVAR UN BINOMIO DE LA FORMA $x+a$ Á UNA POTENCIA. — *Se eleva el primer término x á esta potencia y éste será el primer término del desarrollo, y para obtener cada uno de los restantes se multiplica el coeficiente del término anterior por el exponente de x en este mismo término, se divide el producto por el número de términos ya formados, aumentando una unidad al exponente de a y disminuyéndola al de x.*

Observaciones. — 1.ª En el caso de que uno de los términos del binomio fuese negativo, por ej. a, la fórmula se convertiría en

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots$$

puesto que las potencias impares de a serán negativas.

2.ª Si los dos términos fuesen negativos, la fórmula no cambiará si la potencia es par, puesto que

$$(-x-a)^m = [-(x+a)]^m = (x+a)^m$$

3.ª Si los dos términos son negativos y m es impar, la fórmula será

$$(-x-a)^m = -x^m - max^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \ldots\ldots$$

puesto que

$$(-x-a)^m = -(x+a)^m$$

Aplicaciones de las fórmulas precedentes

1.ª $$(x+a)^6 = x^6 + \frac{1\times 6ax^5}{1} + \frac{6\times 5}{1.2}a^2x^4 + \frac{6\times 5\times 4}{1.2.3}a^3x^3 + \frac{6\times 5\times 4\times 3}{1.2.3.4}a^4x^2$$

$$+\frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2}{1.2.3.4}a^5x + \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1.2.3.4.5.6}a^6,$$ ó lo que es lo mismo,

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$$

2.ª $$(b^2+cy)^6 = (b^2)^6 + 6cy(b^2)^5 + \frac{6\times 5}{2}(cy)^2(b^2)^4 + \frac{6\times 5\times 4}{2.3}(cy)^3(b^2)^3 +$$

$$\frac{6\times5\times4\times3}{2.3.4}(cy)^4(b^2)^2+\frac{6\times5\times4\times3\times2}{2.3.4.5}(cy)^5b^2+\frac{6\times5\times4\times3\times2}{2.3.4.5.6}(cy)^6=$$

$$b^{12}+6cyb^{10}+15c^2y^2b^8+20c^3y^3b^6+15c^4y^4b^4+6c^5y^5b^2+y^6c^6$$

41. *Triángulo aritmético.*—Pueden obtenerse los coeficientes del desarrollo de la fórmula de Newton, mediante el triángulo llamado de Pascal. Éste consiste en una figura como la indicada al margen y cuya construcción y uso vamos brevemente á explicar:

0.	1											
1.	1	1										
2.	1	2	1									
3.	1	3	3	1								
4.	1	4	6	4	1							
5.	1	5	10	10	5	1						
6.	1	6	15	20	15	6	1					
7.	1	7	21	35	35	21	7	1				
8.	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Construcción.—Hecho el triángulo en la forma indicada por la figura, se llena la primera columna con unidades y después cada casilla, agregando al número que ocupa la casilla superior el inmediato de la izquierda.

Así para obtener el 4 de la segunda columna se ha sumado 3 (superior) y 1 (inmediato de la izquierda); para obtener el 56 de la 6.ª columna se ha sumado 21 y 35.

Uso.—El uso de este triángulo es sumamente sencillo.

Se comprenderá bien con algunos ejemplos: Sea $(x+a)^3$ Los coeficientes de este desarrollo son los números comprendidos en la fila N.º 3.

Así es que tendremos:

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

2.º Ejemplo: Sea $(x+a)^8$. Los coeficientes son los números comprendidos en la fila N.º 8.

Es decir: $(x+a)^8=x^8+8ax^7+28a^2x^6+56a^3x^5+70a^4x^4+56a^5x^3$
$+28a^6x^2+8a^7x+a^8$

42. Tercer caso. — *Elevar á potencias un polinomio.*

La regla general para este caso se funda en algunos principios que la naturaleza de estos apuntes no permite exponer.

Nos concretaremos, pues, á indicar el procedimiento que debe seguirse para el desarrollo de la potencia de un polinomio; procedimiento que quizás sea más sencillo y de más fácil aplicación en la práctica que el que podría indicarnos la regla á que nos hemos referido.

1.° Sea $(a+b+c)^4$ Hagamos $b+c=x$ y tendremos

$$(a+b+c)^4=(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$$

Sustituyendo x por $(b+c)$

$(a+b+c)^4=a^4+4a^3(b+c)+6a^2(b+c)^2+4a(b+c)^3+(b+c)^4$, cuyo resultado fácilmente calcularíamos, pues no contiene sino potencias de binomios.

2.° Sea, ahora, $(a+b+c+d\ldots\ldots)^m$ Hagamos $b+c+d+\ldots\ldots,=x$ y tendremos:

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3 +\ldots x^m$$

Sustituyendo x por $b+c+d+\ldots$ tendremos

$$(a+b+c+d+\ldots)^m=a^m+ma^{m-1}(b+c+d+\ldots)$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}a^{m\,2}(b+c+d\ldots)^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}(b+c+d+\ldots\ldots)^3+\ldots\ldots(b+c+d+\ldots\ldots]^m$$

Haciendo con los polinomios que están dentro de los paréntesis lo que se ha hecho con el propuesto; haciendo lo mismo con los que se obtengan en el nuevo resultado, y así sucesivamente hasta que no haya más potencias que de binomios, llegaremos á obtener la potencia emésima del polinomio propuesto.

De lo expuesto deducimos el siguiente

Procedimiento para elevar un polinomio á una potencia. — *Se le considera como un binomio que tiene por primera parte su primer término y por segunda el conjunto de los demás. Hecho esto se desarrolla esta expresión por la fórmula de Newton y se obtiene un resultado que si contiene nuevos polinomios elevados á potencias, tienen un término menos que el propuesto; se desarrollan estos nuevos polinomios por el mismo procedimiento y se obtienen en el resultado otros polinomios con un término menos, y así se continúa hasta llegar á una expresión que no contenga sino potencias binomiales, las que si fuere necesario fácilmente se desarrollarán.*

Como ejercicios de aplicación podemos hallar el cuadrado y el cubo de un polinomio.

Sea, por ejemplo, el polinomio $a+b+c+d$ cuyo cuadrado queremos hallar.

Representándolo por P, tendremos:

$$P^2=(a+b+c+d)^2 \text{ ó}$$
$$P^2=[a+(b+c+d)]^2=a^2+2a(b+c+d)+(b+c+d)^2$$

pero $\quad (b+c+d)^2=[b+(c+d)]^2=b^2+2b(c+d)+(c+d)^2$

pero $\quad (c+d)^2=c^2+2cd+d^2$

Haciendo las sustituciones convenientes tendremos:

$$P^2=a^2+2a(b+c+d)+b^2+2b(c+d)+c^2+2cd+d^2$$

Sea en segundo lugar $(a+b+c+d)^3$

Tenemos:

$$P^3=[a+(b+c+d)]^3=a^3+3a^2(b+c+d)+3a(b+c+d)^2+(b+c+d)^3$$

pero $\quad (b+c+d)^3=[b+(c+d)]^3=b^3+3b^2(c+d)+3b(c+d)^2+(c+d)^3$

pero $\quad (c+d)^3=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$

Haciendo las sustituciones convenientes tendremos:

$$P^3=a^3+3a^2(b+c+d)+3a(b+c+d)^2+b^3+3b^2(c+d)+3b(c+d)^2$$
$$+c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$$

Ejercicios para resolver

1. $(2x^2y^3z^4)^3$
2. $(-2x^2y^2z^3)^3$
3. $(-3ab^2c^3)^4$
4. $\left(\dfrac{2x^2}{3y2}\right)^2$
5. $\left(-\dfrac{4x}{3y^2}\right)^3$
6. $\left(-\dfrac{x^8}{y^2z^2}\right)^4$
7. $[(b^3)^2]^5$
8. $[(x^4)^n]^2$
9. $(x^3)^{p+1}$
10. $(x^{m+1})^2$
11. $(-y^3)^{2m}$
12. $(4a^{m-1}b^{n+1})^3$
13. $(2{,}5a^2x^3)^3$
14. $(mx-nx^2)^2$
15. $(\frac{2}{5}a-\frac{1}{2}b)^2$
16. $(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b)^3$
17. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$
18. $(x^{p^9}-1)^3$
19. $(1+x-x^2)^2$
20. $(1+3x+2x^2)^2$
21. $(1+x+x^2)^3$
22. $(2ab^2x^3+0{,}2a^3b^2x)^3$
23. $(1-x+x^2+x^3)^2$
24. $(0.2xy^2z^3-0{,}3x^2y^3z-0{,}5x^3yz^2)^3$
25. $(1-x)^3(1+x+x^2)^3$
26. $(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)^2$
27. $\dfrac{(27a^4-18a^2b^2-b^4)^2}{64a^2b^4}+\dfrac{(9a^2-b^2)^3(b^2-a^2)}{64a^2b^4}$

CAPITULO IV

Cantidades radicales

43. Se llama *cantidad radical,* ó simplemente *radical,* á la raíz de cualquiera cantidad indicada por el signo $\sqrt{\ }$ llamado radical.

Así $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[m]{a^2-b}$ son cantidades radicales.
El *grado* de un radical se indica por el índice del mismo.

Así $\sqrt{ab}$ es del 2.º grado, $\sqrt[m]{ab}$ es del *emésimo.*

Coeficiente de un radical es la cantidad colocada á la izquierda del mismo sin interposición de ningún signo. El coeficiente de un radical tiene la significación general del coeficiente algebraico é indica por consiguiente que dicho coeficiente multiplica al radical.

$2\sqrt{ab}$, $m\sqrt{a^2-b^2}$, $(a+b)\sqrt{x+y}$ tienen respectivamente por coeficientes 2, m y $(a+b)$.

Radicales semejantes son aquellos que indican raíces de igual grado de las mismas cantidades.

Así $\sqrt{ab}$ $3\sqrt{ab}$ $(m+n)\sqrt{ab}$ son radicales semejantes.

Las raíces de grado impar de cantidades positivas ó negativas tienen igual signo que ellas. Así $\sqrt[3]{-a^3}$ es $-a$ y $\sqrt[3]{a^3}$ es $+a$.

Las raíces de grado par de cantidades positivas pueden ser positivas ó negativas. Así $\sqrt{a^2}=a$ y $\sqrt{a^2}=-a$.

Las raíces de grado par de cantidades negativas, no son ni positivas, ni negativas, pues no hay ninguna cantidad que elevada á una potencia par dé un resultado negativo.

Estas raíces de grado par de cantidades negativas se llaman *radicales imaginarios*, ó cantidades *imaginarias*, para distinguirlos de todos los demás, que se llaman reales.

Se llama *valor numérico* ó *determinación aritmética* de un radical el número que elevado á la potencia indicada por el índice reproduce la cantidad subradical.

Así, p. ej., el valor aritmético de

$$\sqrt[3]{27},\ \sqrt{a^2+2ab+b^2}\ \text{y}\ \sqrt[4]{16a^4b^8}\ \text{serán } 3,\ a+b\ \text{y}\ 2ab^2.$$

CÁLCULO DE LOS VALORES ARITMÉTICOS

44. TEOREMA. — *La raíz de un producto es igual al producto de las raíces del mismo grado de todos los factores.*

Se va á demostrar que

$$\sqrt[n]{a\times b\times c} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$$

En efecto:

Recordando que para elevar un producto indicado á una potencia, se eleva cada uno de sus factores á esa potencia, tendremos:

$$\left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \times \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \times \left(\sqrt[n]{c}\right)^n = a\times b\times c.$$

y extrayendo la raíz del grado n del primero y último miembro, tenemos:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a\times b\times c} \qquad \text{L. Q. D. D.}$$

Aplicación. — Este teorema se aplica para reducir á un solo radical otros dos de igual índice.

$$\text{Así } \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{3\times 5\times 7} = \sqrt[3]{105}$$

45. TEOREMA. — *La raíz de un cociente es igual á la raíz del dividendo partida por la raíz del divisor.*

Se va á demostrar que

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

En efecto:

Sabemos que $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}$ y extrayendo la raíz *enésima* del primero y último miembro, se tiene:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

L. Q. D. D.

Aplicación.— Este teorema permite reducir á un solo radical el cociente de otros dos de igual índice.

Así p. ej. $\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{\frac{64}{8}}=\sqrt[3]{8}$

46. Teorema. — *La raíz de una potencia de un número es igual á la potencia de igual grado de la raíz de dicho número.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[n]{a^5}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^5$$

En efecto:

$$\sqrt[n]{a^5}=\sqrt[n]{a\times a\times a\times a\times a}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^5$$

L. Q. D. D.

Aplicaciones:

1.ª Este teorema permite *introducir debajo de un radical un factor externo.* Basta para ello elevarlo á la potencia indicada por el índice.

En efecto:

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n a}$$

2.ª El mismo teorema resuelve también la cuestión inversa: *sacar del radical un factor interior que sea potencia perfecta del grado que marca el índice.* Basta para ello extraerle á dicho factor la raíz del grado indicado por el índice.

En efecto:

$$\sqrt[n]{b^n \times a} = \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{a} = b\sqrt[n]{a}$$

47. Teorema. — *La raíz de una raíz de un número es igual á otra raíz del mismo número cuyo índice es el producto de los otros dos.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

En efecto:

Supongamos que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$. De esta igualdad deducimos:

$\sqrt[n]{a} = x^m$ ó $a = x^{mn}$, de donde extrayendo la raíz mn de los dos miembros, se obtiene

$$\sqrt[mn]{a} = x \text{ ó } \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \qquad \text{L. Q. D. D.}$$

SIMPLIFICACIÓN Y REDUCCIÓN Á UN ÍNDICE COMÚN DE CANTIDADES RADICALES

48. Teorema. — *Una cantidad radical no varía multiplicando ó dividiendo por el mismo número su índice y el exponente de la cantidad subradical.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$$

En efecto:

$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right)^n = a^n$ y extrayendo la raiz del grado mn del primero y último miembro, tendremos:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n} \qquad \text{L. Q. D. D.}$$

Aplicaciones:

Este teorema tiene dos aplicaciones importantes.

1.ª Sirve para *simplificar* radicales, es decir, transformarlos en otros de igual valor, pero de menor índice; lo que se consigue *dividiendo* el índice y el exponente de la cantidad subradical por el *M. C. D.*

$$\text{Así} \quad \sqrt[5]{a^{10}} = a^2, \quad \sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3}$$

2.ª Sirve para reducir radicales á un índice común, lo que se consigue multiplicando sucesivamente el índice y el exponente de la cantidad subradical de cada uno, por el cociente de dividir el *M. C. M.* de los índices por cada uno de ellos.

Así, si queremos reducir á un índice común los radicales

$\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[5]{2ab}$, tendremos:

para el 1.º $\sqrt[30]{a^{45}}$

» » 2.º $\sqrt[30]{b^{10}}$

» » 3.º $\sqrt[30]{64\, a^6\, b^6}$

Observación. — Con el objeto de operar con números menores, conviene simplificar los radicales antes de reducirlos á índice común.

Operaciones con las cantidades radicales

Los principios que acabamos de exponer nos suministran las reglas para efectuar las operaciones con las cantidades radicales.

REDUCCIÓN DE RADICALES SEMEJANTES

49. *Para reducir radicales semejantes se aplica la regla reducción de términos semejantes.*

$$\text{Así}\quad 3\sqrt{a} + 5\sqrt{a} = 8\sqrt{a}$$

$$a\sqrt{m} + b\sqrt{m} = (a+b)\sqrt{m}$$

$$m\sqrt{b^2-c} - n\sqrt{b^2-c} = (m-n)\sqrt{b^2-c}$$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE CANTIDADES RADICALES

50. *Para sumar ó restar cantidades radicales se aplica la regla para sumar ó restar cantidades algebraicas, haciendo en el resultado la reducción de los radicales semejantes.*

MULTIPLICACIÓN DE CANTIDADES RADICALES

51. El principio N.º 44 nos indica que:

1.º *Para multiplicar radicales de igual índice basta multiplicar las cantidades subradicales y escribir el producto debajo de un radical del mismo grado.*

2.º *Para multiplicar radicales de índice diferente, se reducen á un índice común y después se procede como en el caso anterior.*

DIVISIÓN DE CANTIDADES RADICALES

52. El principio N.º 45 nos indica que:

1.º *Para dividir cantidades radicales de igual índice se dividen las cantidades subradicales, escribiendo el cociente debajo de un radical del mismo grado.*

2.º *Para dividir cantidades radicales de índice diferente, se reducen á un índice común y se procede después como en el caso anterior.*

POTENCIAS Y RAÍCES DE LAS CANTIDADES RADICALES

53. Los principios N.° 46 y N.° 47 nos indican que:

1.° *Para elevar un radical á una potencia se eleva á esa potencia la cantidad subradical, escribiendo el resultado debajo de un radical del mismo grado.*

2.° *Para extraer una raíz de un radical se multiplica el índice de éste por el grado de la raíz.*

Documentos oficiales

Programa del aula de Cosmografía

Bolilla 1.ª

Nociones preliminares. Fenómenos celestes. Astros. Bóveda celeste, sus diversos aspectos, su color y causa. Idea general de la Cosmografía. Primeras nociones sobre la esfericidad de la Tierra. *Horizonte:* su movilidad. Horizonte racional y aparente. Depresión de horizonte; sus fenómenos. *Vertical,* zenit y nadir. Plano vertical. Salida y entrada de los astros; oriente y occidente. *Meridiano.* Eje del mundo. Polos. Línea meridiana; procedimiento para obtener la dirección de esta línea. *Amplitud.* Puntos cardinales y rosa de los vientos. Orientación por medio de la aguja imanada. Brújula de declinación. Coordenadas celestes. *Altura de un astro* y del zenit. Distancia zenital. *Azimut.* Efectos del movimiento diurno con relación á tales coordenadas. *Refracción;* sus efectos. *Ejercicios.*

Bolilla 2.ª

La Tierra. *Coordenadas geográficas.* Ecuador celeste. Línea equinoccial. Paralelos. Círculos polares. Trópicos. Zonas terrestres. Longitud y latitud. Métodos empleados por los astrónomos para la medida de estas coordenadas. Distancia zenital del polo. Determinación del plano meridiano por la posición de las estrellas. Métodos de las señales de fuego, telégrafos, etc., para el cálculo de la longitud. *Pruebas de la esfericidad de la Tierra.* Curvatura de los continentes y de los mares. Observaciones prácticas en el cambio de lugar en todo el largo de un meridiano con relación

á la esfera estrellada y á la altura aparente de los polos celestes sobre el horizonte. Periodicidad del movimiento diurno. *Aislamiento de la Tierra en el espacio.* Viajes de circunnavegación. *Movimiento de rotación de la Tierra.* Este movimiento determina la duración del día y la sucesión de los días y de las noches. *Forma exacta de la Tierra.* Medio para determinarla. Medida del arco de un grado de meridiano en diferentes latitudes. Crecimiento constante de los diferentes largos en los diversos grados de un mismo meridiano desde el ecuador á los polos. Su demostración gráfica. Opinión errónea de algunos autores. *Ejercicios.*

BOLILLA 3.ª

Achatamiento de la Tierra. Dimensiones reales de la Tierra. Determinación de la longitud del metro. Relatividad de las nociones de alto y bajo en la esfera terrestre. Centro común de atracción. Disminución de la intensidad de la pesantez desde el polo hasta el ecuador. ¿El achatamiento de la Tierra es una causa del movimiento de rotación? Experimento de M. Plateau. *Pruebas experimentales de la rotación terrestre.* Invariabilidad del plano de oscilación del péndulo, desvío aparente. Experimentos de M. Foucault; giroscopio. Desvío oriental de los cuerpos que caen libremente. Duración de la rotación, velocidad de los puntos situados en diferentes latitudes. *Globos y cartas.* Proyecciones ortográficas y estereográficas. Desarrollo de Mercator. *Estudio del movimiento diurno de la bóveda estrellada.* Órbita. Zodíaco; su división. Planetas cuya rotación ha sido verificada y medida. Zonas de las estrellas.

BOLILLA 4.ª

Círculos horarios. Determinación de la posición de una estrella sobre la esfera celeste. *Ascensión recta y declinación.* Medida de estas coordenadas. *Anteojos astronómicos.* Telescopio. Poder de visión obtenido con ellos. Anteojos meridianos ó instrumentos de pasaje. Heliómetro; su uso. *Movimiento propio del Sol;* su estudio considerado en la esfera y en las coordenadas celestes. Eclíptica; su inclinación. Elipse; focos. Plano de la eclíptica. Distancias relativas de la Tierra al Sol durante el año. Determinación gráfica de la forma real de la órbita del Sol. Resultados del heliómetro.

Perigeo y apogeo. Excentricidad. Método para determinar la duración del año trópico por el movimiento del Sol en ascensión recta. Cálculo preciso del momento en que el centro del Sol pasa por el plano del ecuador. *Movimiento real de traslación de la Tierra al rededor del Sol.* Apreciación de varios fenómenos en la hipótesis de tales movimientos. *La Tierra es un planeta.* La Tierra no cae en el espacio. *Año trópico.* El movimiento de traslación determina la duración del año trópico. *Especies de días;* origen del día. Día solar, y las estaciones en sus relaciones con el movimiento aparente del Sol. Día sideral; tiempo sideral. Estrellas fundamentales. Día medio y tiempo medio. Valor del año trópico en días siderales. Explicación gráfica de la diferencia del día solar y del día sideral. *Ejercicios.*

BOLILLA 5.ª

El principio de las áreas dando á conocer el movimiento angular del Sol. *Coordenadas eclípticas.* Velocidad variable del Sol. *Causas de las desigualdades de los días solares.* Sol ficticio ecuatorial. Sol uniforme en la eclíptica. Coluros de los equinoccios y de los solsticios. Ecuación del tiempo. *Precesión de los equinoccios;* historia de su descubrimiento y su explicación. Año trópico y sideral. Arcos anuales de retrogradación. Causas que producen el fenómeno de la precesión. *Nutación;* su explicación. Cambio lento de lugar del eje mayor de la órbita terrestre. Variabilidad de la línea de los equinoccios y su combinación con el anterior fenómeno. Distinción de los signos zodiacales de las constelaciones ó grupos estrellados de la misma denominación. *Ejercicios.*

BOLILLA 6.ª

Los días y las noches en la superficie terrestre. La Tierra en uno de los equinoccios y en uno de los solsticios. La Tierra entre el equinoccio y el solsticio. Crepúsculos astronómicos y civiles. *Gnomones, y cuadrantes solares. Las estaciones.* La inclinación del eje de la Tierra sobre la eclíptica da lugar á la sucesión de las estaciones. Duración desigual de las estaciones y causas de esta desigualdad. Causas que determinan la intensidad del calor solar; explicación de las diferencias de temperatura en las distintas zonas. Variación de temperatura en las diversas épocas del año. Por qué las tem-

peraturas extremas no coinciden con los solsticios. *El calendario.* Sus reformas. *Ejercicios.*

Bolilla 7.ª

La Luna. Forma de la Luna. La Luna satélite de la Tierra. ¿Es la Luna el único satelite de la Tierra? Fases de la Luna. Su luz. Luz cenicienta. *Movimientos de la Luna.* Revolución de la Luna al rededor de la Tierra; revolución sinódica. Su movimiento al rededor del Sol; revolución nódica. Movimiento de rotación. Libraciones. *Cálculo de sus distancias. Dimensiones del globo lunar.*

Bolilla 8.ª

Selenografía, ó geografia de la Luna. Topografía de nuestro satélite. Mares y montañas. *Selenología* ó geología lunar. Volcanes, cráteres. Cráteres radiantes. Llanuras. Nacimiento de la Luna y su historia. *La atmósfera de la Luna.* Paisajes lunares. La vida en el mundo lunar. Los habitantes de la Luna; los selenitas apócrifos. Diferencias esenciales entre aquel mundo y el nuestro. Una estancia en nuestro satélite. El cielo y la Tierra vistos desde la Luna.

Bolilla 9.ª

El Sol. Aspecto general del Sol, su color, luz, radiaciones químicas. Influencias mecánicas, magnéticas y eléctricas. *Su distancia á la Tierra;* su volumen y su peso. La superficie del Sol; las manchas. *Rotación del Sol.* Cómo se comprueba esta rotación, en cuánto tiempo la efectúa y en qué sentido. Protuberancias solares.

Bolilla 10.ª

El Sol en el mundo sideral. Si es una estrella de mediana magnitud y si pertenece á la vía láctea. Opinión de Lalande sobre la probabilidad de un movimiento del Sol. Enlace de este movimiento con la rotación. *Constitución física del Sol.* Opiniones antiguas sobre la naturaleza del Sol. Análisis espectral del Sol. Hipótesis de Wilson, Kirchoff, Faye, etc., sobre la constitución física del Sol. *Temperatura del Sol* y conservación de su calor. Cálculos de esa

temperatura. Origen de la radiación solar. Hipótesis diversas para explicar su conservación. Cambios de la luz del Sol y consecuencias. Imposibilidad física de la existencia de seres organizados en la superficie del Sol. *Verdadera misión de este astro.*

BOLILLA 11.ª

PLANETAS. Hipótesis de Ptolomeo, Copérnico, Ticho Brahe y moderna, para explicar el sistema planetario. ¿Por qué no coincide con la moderna la hipótesis de Copérnico? *Exposición del sistema solar.* Enumeración de los planetas. Planetas interiores y exteriores. Zonas en que describen sus trayectorias. Planetas telescópicos. Caracteres que distinguen los planetas de las estrellas. Los elementos del sistema solar distribuídos en el orden de sus distancias al Sol, de sus volúmenes y de sus masas, etc. Elementos de movimiento ó de la órbita de cada planeta. Método que debe emplearse para estudiar el movimiento propio de un planeta. *Movimientos aparentes de los planetas alrededor del Sol.* Explicación de los movimientos aparentes. Fases de los planetas. Duración de las revoluciones sinódicas de los planetas principales. *Principios de la gravitación universal. Leyes de Kepler.* Su explicación. Su aplicación á los satélites. Cálculo de la duración de las revoluciones de cada planeta al rededor del Sol. Revoluciones siderales de los principales planetas. Distancias medias al Sol. *Ley de Titius ó de Bode.* Pesantez ó gravedad. *Leyes de Newton. Ejercicios.*

BOLILLA 12.ª

MONOGRAFÍAS DE LOS PLANETAS. VULCANO. Hipótesis presentadas por Leverrier, Lescarbault y otros. Fundamentos de estas hipótesis. MERCURIO. Conocimiento de los antiguos sobre Mercurio. Dimensiones y distancias. Aspectos y movimientos. Pasos de Mercurio por el disco del Sol. Constitución física de Mercurio. VENUS. Idea de los antiguos sobre este planeta. Dimensiones y distancias. Movimientos. Fases. Visibilidad de Venus en pleno día. Rotación. Montañas. Luz secundaria y atmósfera. Satélite de Venus (?). Constitución física de este planeta. *Ejercicios.*

Bolilla 13.ª

Marte. Conocimiento de los antiguos sobre Marte. Movimientos, distancias, aspectos, dimensiones. Satélites. Constitución física. Meteorología de este planeta. El mundo marcial. Los planetoides. Estudios generales sobre los pequeños planetas. Cómo se descubren los planetoides. Júpiter. Aspectos de Júpiter. Movimiento de rotación y traslación. Bandas y atmósfera. Descubrimiento de los satélites y sus movimientos aparentes y propios. Constitución física. El mundo de Júpiter. *Ejercicios.*

Bolilla 14.ª

Saturno. Ideas de los antiguos. Movimientes aparentes. Elementos de su órbita. Rotación, forma y achatamiento de Saturno. Descubrimiento de los anillos. Examen telescópico. Constitución de los anillos. Satélites. El mundo de Saturno. Urano. Descubrimiento, dimensiones, distancias, movimientos. Constitución física. Satélites. Neptuno. Descubrimiento, dimensiones, distancias, movimientos, aspecto físico. Satélite. *Ejercicios.*

Bolilla 15.ª

Cometas. Consideraciones generales sobre este estudio. *Astrología cometaria.* Idea de los antiguos sobre los cometas. Los cometas en la Edad Media. *Astronomía cometaria.* Progresos de la astronomía cometaria. Descubrimiento de Newton sobre los cometas. Su distinción de los planetas. Movimientos y órbitas. Cometas periódicos: interiores ó de corto período, de período medio y de período largo. Número de cometas. Cometas de órbitas hiperbólicas. Agrupaciones cometarias. *Constitución física de los cometas.* Formas diversas y dimensiones de las colas cometarias. Brillo de los cometas. Transformaciones físicas de los cometas. Masa y densidad de los cometas. Su constitución. *Teoría de los fenómenos cometarios;* primeras hipótesis.

BOLILLA 16.ª

Hipótesis moderna sobre la constitución física de los cometas. ESTRELLAS FUGACES. Descripción, aspecto y clasificación de las estrellas fugaces. *Teoría de las estrellas fugaces*. Enlace de estos cuerpos con los rastros de algunos cometas. Creencia sobre la probabilidad del choque de un cometa con la Tierra. Sus resultados. BÓLIDOS; su aspecto. Altura de la atmósfera deducida de la aparición de los bólidos. URANOLITOS. Su aspecto y composición química. Caídas de uranolitos famosos. Consideraciones sobre la teoría de las estrellas fugaces, los bólidos y los uranolitos. LUZ ZODIACAL. Aspecto de la luz zodiacal y circunstancias que acompañan su aparición. Teoría sobre la constitución de la luz zodiacal.

BOLILLA 17.ª

ECLIPSES. Teoría general de los eclipses. Consideración y explicación de estos fenómenos bajo diferentes aspectos. Cono de sombra, de penumbra. Condiciones necesarias para que se produzcan los eclipses. Efecto singular producido por la retrogradación de los nodos en la eclíptica. *Ciclo ó período de Saros* de los antiguos. Razón de observarse mayor número de eclipses de Luna, empero de ser éstos menos numerosos que los de Sol. *Eclipses de Sol.* Clasificación de los eclipses de Sol. Condiciones para que éstos se produzcan. ¿Dónde son visibles? Su duración. Dígitos. Principales fenómenos que por lo común se observan durante los eclipses totales de Sol: cambio de color del cielo; modificación de los objetos terrestres, vegetales y animales; oscuridad que se produce; descensos de temperatura; aspecto de la bóveda estrellada; reaparición de la luz solar; sierras de Bailly; corona; protuberancias; penachos y radiaciones luminosas. Eclipses notables; papel importante que han desempeñado en la historia de la humanidad.

BOLILLA 18.ª

Eclipses de Luna. Su división en totales y parciales. ¿Por qué nunca son anulares? Duración de los eclipses lunares; cuándo se verifican; cuándo son centrales. Distintos aspectos que ofrece la Luna durante este fenómeno. Coloraciones del disco. Presencia si-

multánea del Sol y de la Luna sobre el horizonte durante el fenómeno. ¿Dónde son visibles? Medios que pueden servir para predecir los eclipses. Su historia. OCULTACIONES. Su interés bajo el punto de vista físico. Teoría relativa á este fenómeno. Ilusión que se advierte frecuentemente en las ocultaciones. Ocultaciones de Júpiter por Marte y de Venus por Mercurio. Ocultaciones de estrellas. *Pasos de Venus por el disco del Sol.* Determinación de la paralaje solar por los pasos de Venus. Aplicaciones de ciertos fenómenos celestes á la cronología. *Eclipses de los satélites de Júpiter.* Cálculo de la velocidad de la luz. *Ejercicios.*

BOLILLA 19.ª

ESTRELLAS. Número de estrellas visibles á simple vista; ídem con instrumentos. *Medios para clasificar las estrellas. Catálogos;* grandísima importancia de estos trabajos. Designación de las estrellas en los catálogos. Longitudes y latitudes; primer meridiano. *Constelaciones.* Magnitud de las estrellas ¿Qué se entiende por magnitud? Medio para conocer el número de estrellas de cada orden. División de la esfera estrellada en un horizonte dado. Constelaciones más notables de las tres zonas. *Escintilación. Irradiación. Distancias de las estrellas á la Tierra.* Paralaje anual de las estrellas. Tiempo que emplea la luz de las estrellas para llegar á la Tierra. Consecuencias de la paralaje. *Aberración;* sus causas. *Ejercicios.*

BOLILLA 20.ª

Coloración de las estrellas. Color atribuído por los antiguos á ciertas estrellas. Colores de los astros vistos con telescopios. Falta de conformidad en colores hallados por distintos astrónomos. Determinación numérica de los colores. Hipótesis sobre los cambios de colores. *Variabilidad de las estrellas;* primeros descubrimientos al respecto. Nuevos estudios sobre estrellas variables y últimos descubrimientos de esta clase. Teorías sobre la causa de la variabilidad. Estrellas periódicas, temporales y nuevas. *Estrellas dobles y múltiples.* Importancia de estos astros. Trabajos de célebres astrónomos referentes á las estrellas múltiples. Catálogo de este linaje de estrellas. Distinción de las estrellas dobles en parejas ópticas y parejas físicas. Duración de las revoluciones de algunos soles do-

bles. Colores variados de las componentes. Grupos de estrellas y cúmulos estelarios. VÍA LÁCTEA. Su explicación. Ideas antiguas relativas á la vía láctea. Aspecto de la misma.

BOLILLA 21.ª

NEBULOSAS. Nebulosas resolubles é irresolubles, estelares, planetarias y estrellas nebulosas total ó parcialmente resolubles. Nébulas notables, espirales y de forma irregular. Transformaciones de las nebulosas. Distribución de las nébulas. *Hipótesis de Laplace sobre la formación de nuestro sistema planetario.* TIDOLOGÍA. MÉTODOS DE NAVEGACIÓN Y ORIENTACIÓN. ANÁLISIS ESPECTRAL. Ligera idea de este nuevo género de investigaciones astronómicas. Ligera idea también de los espectroscopios y de los telespectroscopios. El análisis espectral aplicado á conocer las substancias de los astros y sus diversas condiciones. *Ciencias que tienen relación con la Cosmografía.* Aplicaciones de esta ciencia.

TEXTO: *Piaggio*, Curso de Cosmografía.

NICOLÁS N. PIAGGIO.

Consejo de E. S. y Superior.

Montevideo, Mayo 23 de 1894.

Pase á dictamen del señor Decano de la Facultad de Matemáticas, Ingeniero don Víctor Benavides.

DE-MARÍA.

Enrique Azarola.
Secretario.

Montevideo, Mayo 30 de 1894.

Señor Rector:

He examinado el programa de Cosmografía confeccionado por el profesor de la materia D. Nicolás Piaggio, y cúmpleme informar que, á mi juicio, responde en todo al método práctico de enseñanza que debe prevalecer en nuestra Universidad.

Saluda atentamente al señor Rector.

VÍCTOR BENAVIDES.

Consejo de E. S. y Superior.

Montevideo, Junio 1.º de 1894.

Apruébase el precedente programa de Cosmografía; y en cuanto al texto, el Consejo se reserva proveer más adelante.

DE-MARÍA

Enrique Azarola,
Secretario.

Programa del Aula de Francés dividido en tres años

PRIMER AÑO

1.º NOCIONES GENERALES

Lenguas— Familias de lenguas.— Lenguas neolatinas.— Gramática: sus definiciones y división.— Proposición: sus elementos, sus especies.—Análisis lógico del castellano.— Modelos y ejercicios del texto.

2.° LECTURA

Fonética.— De la fonética en general.— Definición, división.— Nociones de fonología.— Lenguaje: sus especies.— Breve idea de la fonación.— Sonido vocal, voz, articulación.—División fonética de los sonidos.— Signos ortográficos y de puntuación.— Alfabeto. — Letras: sus especies.— Alfabeto francés.— Historia.— Adición de letras compuestas.— Clasificación de las letras: 1.° por su esencia; 2.° por su composición; 3.° por su formación fonética; 4.° por su valor.— Comparación de las letras entre ambos idiomas.— Sílaba: su división.— Palabra: sus especies.— Acento tónico ó prosódico.— Enlace de voces.— Silabario.— Definición, división.— Ejercicios de silabeo sobre:

1.° las vocales, simples y compuestas, y sus equivalentes, en sílabas directas, inversas y cerradas; 2.° las vocales nasales y sus equivalentes; 3.° los diptongos vocales, simples y nasales, y sus equivalentes; 4.° los diptongos consonantes y sus equivalentes; 5.° las letras sonoras al final de vocablo; 6.° las letras nulas en principio, medio y fin de dicción; 7.° las excepciones y dificultades del silabeo; 8.° los enlaces.

Lectura expresiva. Reglas principales.— Ejercicio del texto.— Recapitulación general. — Lectura de trozos selectos. Ejercicios orales y escritos.

3.° VOCABULARIO

Conocimiento de los vocablos más comunes. — División del tiempo y del espacio.— Números.— Cuerpo humano.— Alma.— Familia.— Vestido.— Habitación. — Alimentación. — Estudio.— Profesiones y oficios.— Diversiones.— Animales. — Plantas. — Minerales.

4.° ANALOGÍA Y COMPOSICIÓN

Artículo.—Definición, división, flexiones, uso.— Artículo partitivo: reglas más elementales. Ejercicios del texto.— *Sustantivo.* Definición, división.— Accidentes del sustantivo: género, número.— Formación del plural.— Complemento del nombre. Ejercicios del texto.— *Adjetivo.* Definición, división.— Formación del femenino y del plural en los adjetivos calificativos: reglas principales.— Adje-

tivos determinativos: sus especies, flexiones, uso.— Concordancia y régimen del adjetivo: reglas más elementales.— Observaciones sobre *demi, feu, mi, vingt et cent, mille; même, quelque, tout.*— Ejercicios del texto.— *Pronombre.* Definición, especies, flexiones, uso.— Concordancia del pronombre: regla general.— Observaciones sobre *chaque, chacun.*— Ejercicios del texto.— *Verbo.*— Definición del verbo: 1.º por su esencia; 2.º por su etimología; 3.º por su conjugación.— Sujeto y complementos del verbo.— Accidentes del verbo: persona, número, tiempo, modo, voz.— Radical y terminaciones.— Conjugaciones.— Formas de conjugación.

Práctica de la conjugación en las cuatro formas: 1.º Conjugación escrita y oral de los tiempos simples de los verbos auxiliares *avoir* y *être.*— Uso de los auxiliares.— Formación y conjugación escrita y oral de los tiempos compuestos de los auxiliares *avoir* y *être,* y de los modelos *aimer, finir, recevoir, rendre, monter, grandir, descendre.*—Ejercicios del texto.

2.º Conjugación escrita y oral, según el orden de conjugación, de los paradigmas siguientes:

Voz activa:

a) con *avoir: Aimer, finir, recevoir, rendre.*— Ejercicios del texto.

b) con *être: Monter, grandir, descendre.*

Voz pasiva:

Être aimé, averti, reçu, attendu.

Voz pronominal:

Se reposer, se réjouir, s'apercevoir, se rendre.—S'en retourner, s'y entendre.

3.º Conjugación escrita y oral de los verbos *agréer, étudier, jouer, continuer.*—Ejercicios del texto.

4.º Conjugación escrita y oral de verbos impersonales esenciales y accidentales: *Tonner, résulter, y avoir, c'est, il me semble, il m'arrive, s'agir, s'en manquer.*— Ejercicios del texto.—Concordancia del verbo: reglas más elementales.— Ejercicios del texto. — *Participio.* Definición, división. — Participio presente: reglas más elementales de concordancia.— Participio pasado: reglas generales de concordancia, sin *auxiliar,* con *être,* con *avoir.*— Ejercicios del texto.

Partes invariables de la oración.— Definiciones, especies. — Conocimiento de las más usuales, principalmente de las que forman *idiotismos.*— Ejercicios del texto.

Análisis gramatical.— Modelos y ejercicios del texto.

Nota.— Los ejercicios del texto, en los tres años, constituyen deberes que hará el estudiante en casa y que se corregirán en clase.

Texto: Lengoust, *Curso preparatorio.*

SEGUNDO AÑO

Proposición.— Revisión del Curso preparatorio.— Análisis lógico del francés.— Modelos y ejercicios del texto.

Artículo.— Revisión del Curso preparatorio.— Artículo partitivo. — Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Sustantivo.— Revisión del Curso preparatorio.— Género de: *aigle, amour, délice, orgue, automne, couleur, couple, enfant, foudre, gens, hymne, œuvre, orge, pâque, Pâque ó Pâques, période, personne, quiconque, quelque chose, autre chose, grand'chose.* Plural de los nombres compuestos. Plural de los nombres propios y extranjeros.—Complemento del nombre.— Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Adjetivo.— Revisión del Curso preparatorio.— Formación del femenino y del plural en los sustantivos y los adjetivos calificativos: reglas y excepciones.— Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Pronombre.—Revisión del Curso preparatorio. Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Verbo.— Revisión del Curso preparatorio.— Ejercicios orales y escritos de conjugación sobre los paradigmas del Curso preparatorio.— Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Terminaciones propias y comunes.— Características.— Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Tiempos primitivos.— Tiempo fundamental; tiempos secundarios: su formación.— Tiempos derivados: su formación.— Clasificación de los verbos por su derivación en regulares, semirregulares é irregulares.— Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Verbos semirregulares.— Su estudio por grupos, y su conjugación escrita y oral según el orden de derivación. —Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Participio.— Revisión del Curso preparatorio.— Concordancia del participio pasado conjugado con *avoir.*— Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Partes invariables de la oración.— Revisión del Curso preparatorio.— Formación de los adverbios de modo.— Uso de *le plus, le mieux, le moins.*— Uso de la negación *ne.*— Conjunciones que rigen el subjuntivo. Oraciones circunstanciales de tiempo futuro que principian por *aussitôt que, sitôt que, le plus tôt que, chaque fois que, toutes les fois que, une fois que, dès que, lorsque, le jour que, pendant que, tandis que, tant que, quand,* etc.— Oraciones comparativas y condicionales.— Idiotismos.— Observaciones, vocabulario y ejercicios del texto.

Texto: Lengoust, *Curso elemental, 1.ª parte.*

TERCER AÑO

1.º GRAMÁTICA

Proposición.— Revisión del Curso elemental, 1.ª parte.— Construcción de la proposición.— Reglas, observaciones y ejercicios del texto.

Artículo.— Revisión del Curso elemental, 1.ª parte.— Ejercicios de imitación. — Sintaxis elemental del artículo. — Ejercicios del texto.

Sustantivo.— Revisión del Curso elemental, 1.ª parte.— Ejercicios de imitación.— Sintaxis elemental del sustantivo.— Ejercicios del texto.

Adjetivo.— Revisión del Curso elemental, 1.ª parte.— Ejercicios de imitación.— Sintaxis elemental del adjetivo.— Ejercicios del texto.

Pronombre.— Revisión del Curso elemental, 1.ª parte.— Ejercicios de imitación.— Sintaxis elemental del pronombre.— Ejercicios del texto.

Verbo.— Revisión del curso elemental, 1.ª parte.— Ejercicios de imitación.— Ejercicios del texto sobre conjugación oral y escrita de los verbos semirregulares.

Verbos irregulares.— Su estudio por grupos, y su conjugación escrita y oral según el orden de derivación.— Ejercicios del texto.

Verbos defectivos.— Su estudio y conjugación escrita y oral.— Ejercicios del texto.

Sintaxis elemental del verbo.— Ejercicios del texto.

Participio.— Revisión del Curso elemental, 1.ª parte.— Sintaxis elemental del participio.— Ejercicios de imitación.— Ejercicios del texto.

Partes invariables de la oración.— Revisión del Curso elemental, 1.ª parte.— Ejercicios de imitación.— Sintaxis elemental.— Ejercicios del texto.

2.º TRADUCCIÓN

Lectura y traducción escrita y oral de todo el texto.— Análisis de verbos.— Análisis gramaticales, lógicos y de construcción.— Dictados y reglas de ortografía.— Conversaciones sobre los trozos leídos.

Textos: Lengoust, *Curso elemental, 2.ª parte* (en francés).— *El Traductor francés.*

Montevideo, Mayo 29 de 1893.

Pase á dictamen del señor Vocal del Consejo, doctor don J. M. Carafí.

DE-MARÍA.

Enrique Azarola,
Secretario.

Montevideo, 30 de Junio de 1894.

Señor Rector:

He tomado conocimiento de la división en tres años del programa del aula de Francés, hecha por el señor Lengoust, catedrático de la asignatura, en cumplimiento de la resolución del Consejo. Siendo esta división concordante, en un todo, con las opiniones que tuve el honor de presentar al Consejo y que merecieron su aceptación, me permito recomendar la aprobación del precedente programa.

Saludo al señor Rector con mi mayor consideración.

JOSÉ M. CARAFÍ.

Montevideo, Julio 4 de 1894.

Por lo que resulta del precedente dictamen, y de acuerdo con la resolución del Consejo fecha 26 de Febrero último, se tiene por aprobado el Programa de Francés dividido en tres años.— Publíquese en los ANALES DE LA UNIVERSIDAD.

DE-MARÍA.

Enrique Azarola,
Secretario.

Proyecto de reglamentación de los exámenes de Práctica Farmacéutica

Montevideo, 9 de Junio de 1894.

Señor Decano de la Facultad de Medicina, doctor don Elías Regules.

Cumpliendo el encargo que verbalmente tuvo Vd. á bien confiarme, someto á su aprobación el adjunto proyecto de reglamentación de los exámenes de Práctica Farmacéutica. He procurado que en cada examen correspondiente á un año, vayan gradualmente aumentando las dificultades con relación al examen del año anterior, dejando, como es lógico, las operaciones más difíciles para el último, y comprendiendo en éste el estudio del Arte de recetar, de los Medicamentos incompatibles y de la Legislación Farmacéutica, puntos todos de importancia, que hasta ahora han sido apéndice de otras asignaturas ó no han sido estudiados por nuestros alumnos.

1.er AÑO

Soluciones—Pociones—Infusiones y decocciones—Mezclas de polvos—Pomadas magistrales—Paquetes de polvos ó papeles.

2.o AÑO

Soluciones de sustancias activas en pesadas mínimas (Inyecciones, colirios, etc.)—Emulsiones—Loochs—Obleas.

3.er AÑO

Píldoras—Supositorios, bizmas ó epitemas—Conocimientos generales del Arte de recetar—Estudio de los incompatibles—Legislación Farmacéutica vigente.

Saludo á Vd. muy atentamente.

ANTONIO CARLOSENA.

Montevideo, Junio 13 de 1894.

Conforme en todo con el señor Carlosena, elévese á resolución del señor Rector el precedente programa.

ELÍAS REGULES.

Montevideo, Junio 14 de 1894.

Elévese al Consejo para su resolución.

DE-MARÍA.

Enrique Azarola,
Secretario.

Consejo de E. S. y Superior.

Montevideo, Junio 18 de 1894.

Apruébase el precedente Proyecto de reglamentación de los exámenes de Práctica Farmacéutica.

DE-MARÍA.

Enrique Azarola,
Secretario.

Montevideo, Junio 20 de 1894.

Comuníquese al señor Decano de la Facultad de Medicina y publíquese en los Anales de la Universidad.

De-María.

Enrique Azarola,
Secretario.

Avisos oficiales

Secretaría de la Universidad.

Llámase á concurso de oposición para proveer la regencia del Aula de Geometría Analítica de la Facultad de Matemáticas.

Las solicitudes de los señores aspirantes se recibirán en esta Secretaría hasta el 10 de Febrero del año próximo entrante.

El acto de las oposiciones tendrá lugar en la segunda quincena del propio mes.

Montevideo, Junio 23 de 1894.

Azarola,
Secretario General.

Secretaría de la Universidad.

Llámase á concurso de oposición para proveer la regencia del Aula de Patología Interna de la Facultad de Medicina.

Las solicitudes de los señores aspirantes se admitirán en esta Secretaría hasta el 15 de Noviembre del corriente año.

Las oposiciones tendrán lugar en la Facultad de Medicina en la segunda quincena del propio mes.

Montevideo, Julio 3 de 1894.

Azarola,
Secretario General.

Secretaría de la Universidad.

El Consejo de Enseñanza Secundaria y Superior, con aprobación del Poder Ejecutivo de la República, ha sancionado la siguiente resolución, como parte integrante de las prescripciones universitarias vigentes:

En los cursos que no puedan seguirse libremente será permitida la inscripción con multa hasta un mes después del día fijado oficialmente para la apertura de las clases, cargándoseles á los que se matriculen en estas condiciones un número de faltas igual al de días en que haya funcionado el aula de que se trate, con más cuatro faltas, si la clase es alternada, y ocho, si es diaria.

Esta resolución será aplicada respecto de los cursos del presente año.

Lo que se hace saber á sus efectos.

Montevideo, Marzo 14 de 1894.

Azarola,
Secretario General.

Apuntes para un Curso de Derecho Administrativo

POR EL DOCTOR DON CARLOS M. DE PENA

(Continuación)

CAPÍTULO VII

LAS FUNCIONES DEL ESTADO Y EL PRINCIPIO DE LA DIVISIÓN DE LOS PODERES

I

SUMARIO: Referencias á la misión del Estado; funciones del mismo; criterio establecido antes para su ejercicio. — Variedad de funciones; opinión de Leroy-Beaulieu. — La Administración del Estado como conjunto orgánico; su desenvolvimiento. — Funciones y poderes del Estado; concepto de los poderes.

Se ha dicho antes que el Estado tiene por misión declarar el derecho, tutelarlo, proteger su ejercicio, mantenerlo y aplicarlo por leyes y disposiciones de carácter ineludible y coercitivo. Se ha dicho que el Estado tiene también por misión cooperar á los fines sociales en aquello que tienen éstos de esencial para la vida humana ó para el progreso ó integración constante del *agregado social;* el Estado debe mantener ciertas condiciones que son esenciales para el perfeccionamiento y bienestar de la sociedad. Se ha dicho, igualmente, que ninguno de estos fines del Estado es posible si el Estado no se mantiene y se desarrolla como organismo, cuyo funcionamiento interesa á todo el cuerpo social y es paralelo con el crecimiento de éste.

Si aceptamos como bien fundada en los hechos la conclusión de Spencer, de que el Estado no se presenta con igual naturaleza al través de los tiempos, tendremos que inferir que tampoco serán iguales las funciones que haya realizado al través del espacio. La historia confirma plenamente el razonamiento y muestra cómo en

el curso de la civilización la actividad del Estado se ha desplegado en varias direcciones, ha recaído sobre cosas y servicios que antes le fueron extraños, ha abandonado otros y ha extendido su radio en la medida que lo han requerido las exigencias del bienestar social.

Alternativa ó simultáneamente ha podido ser considerada la actividad del Estado respondiendo á condiciones esenciales ó circunstancias transitorias en la vida de los pueblos, y de ahí la clasificación corriente de los fines permanentes y los fines secundarios ó históricos. Nosotros hemos prescindido de esa distinción y adherido al criterio establecido por Fouillée: " El Estado, el Gobierno, la Administración en todos sus actos, deben tener por norma el máximo de libertad, igual para todos los individuos, que sea compatible con el máximo de libertad, de fuerza y de interés para el organismo social. "

Y al hacerlo así, entendemos apartarnos del concepto erróneo de que el Estado tiene una naturaleza permanente igual en todos los tiempos; y nos apartamos, por lo mismo, de la doctrina de los que creen que la manera de manifestar el Estado su actividad y las direcciones que éste lleva y la manera de distribuir y ejercitar el Estado su acción en esas direcciones, sean en todas las naciones las mismas de siempre.

Leroy Beaulieu ha dicho con envidiable claridad, que la mayor parte de las clasificaciones sobre las funciones del Estado son arbitrarias. Es imposible establecer teóricamente una demarcación fija entre la esfera del Estado y la de las sociedades libres ó los individuos. Las dos esferas se penetran á menudo la una á la otra, y se excluyen. La historia y la experiencia demuestran que, á través de las edades, algunas funciones de las que hoy son consideradas como formando parte de la esencia misma del Estado, las ha adquirido éste bastante tarde, y que durante mucho tiempo han sido desempeñadas parcialmente por particulares y por las asociaciones que éstos formaban.

La sociedad es un ser plástico que goza de una maravillosa facilidad para adaptarse al medio, para crear los órganos que son indispensables á su conservación ó á su progreso (1).

Estudiando la Administración del Estado tal como se presenta á nuestra vista, no podemos prescindir de considerarla como un

(1) Leroy Beaulieu: *L'État moderne et ses fonctions.*

conjunto orgánico, de desarrollo gradual, sumamente vario y complicado. Notamos que en todos los servicios prestados por el Estado, su actividad se va desenvolviendo por partes, se caracteriza por fines determinados, se exterioriza por órganos, y esta diversificación no impide cierta homogeneidad general, no rompe cierta armonía ó unidad fundamental. Las relaciones que entrelazan á los órganos son susceptibles de clasificación, y la posición, el procedimiento ó modo de obrar de los mismos se encuentran en igual caso y están sometidos á la ley de adaptación.

Ahora bien: determinados la naturaleza y fines del Estado y encarada su actividad como una necesidad de todo momento, es imprescindible establecer la realización constante de aquellos fines por medio de facultades que se ponen en acción. El poder del Estado, como todo otro poder, se concibe *personificado* como una facultad de obrar, de resolver por sí, de apreciar con independencia. Desde que el Estado, según nuestro concepto, puede asemejarse á un organismo vivo, su actividad debe ser concordante con las necesidades de ese organismo y con los fines á que responde. En consecuencia, estará subordinada á una norma y arreglada y dispuesta de tal manera que las funciones de ese organismo se desenvuelvan y cumplan regularmente, y responda todo él á los fines de su existencia por medio de magistrados ó funcionarios investidos de facultades determinadas.

Á esta manera de manifestarse constantemente la actividad del Estado, llamamos funciones del Estado.

Aunque el Estado sea un ser de naturaleza muy compleja, determina un sujeto con personalidad propia que se dirige á sí mismo; empero su actividad se manifiesta en una serie sucesiva de momentos y es á la vez una actividad simultánea. Estas condiciones de su naturaleza obligan á determinar varias funciones en que se diversifica su actividad, como ya queda dicho.

A los modos de manifestarse la esencia de la actividad del Estado con autonomía y autoridad superior, en ciertas direcciones que se consideran fundamentales en la existencia del Estado y que se caracterizan por cierta estructura general, en una esfera dada del Gobierno, llaman muchos: *poderes del Estado.*

El poder, en cualquiera esfera de la vida que se le considere, no significa simplemente facultad de hacer ó no hacer: supone aptitud de obrar con independencia, de desarrollar por impulso propio cierta energía, de emplear ciertos medios generales para un

fin determinado; envuelve el propósito de hacer efectiva la facultad, de mantenerla en sus consecuencias y de resistir para ejercerla y mantenerla. *Poder*, tratándose del Estado y según el concepto que de él nos hemos formado, sugiere la idea del ejercicio y mantenimiento de un principio, de una regla concerniente á su organismo, necesaria á la conservación del mismo; da idea de superioridad como ordenación, como personificación jurídica, como entidad soberana que impone, que acciona y ejecuta espontánea y libremente, encaminada al bien común.

De lo dicho se infiere que se consideran poderes del Estado, en todas sus esferas, y no puramente en la esfera del Estado nacional, aquellos modos generales de obrar que asumen por la continuidad de su ejercicio una investidura ó estructura especial, dentro de la cual obran con cierta independencia ó supremacía. Y por este concepto los poderes del Estado son varios, como son sus funciones en los diversos grados de la organización política.

II

SUMARIO: La actividad del Estado reducida á tres poderes; la división de los poderes en la ciencia constitucional y en la ciencia administrativa; puntos de vista de una y otra. —La división de los poderes según Aristóteles, Montesquieu y Madison. — Los fundamentos de la teoría; su aplicación en los Estados Unidos del Norte; atenuaciones y modificaciones.

Se ha pretendido reducir toda la actividad del Estado á tres funciones primordiales en todo orden de servicios, caracterizando esas tres funciones por la estructura específica de ciertos órganos de gobierno, tomándolos del Estado inglés á fines del siglo XVIII.

Nos parece incompleta ó errónea esta teoría, según la cual la clasificación y separación de las funciones del Estado no responde á otra cosa que á imponer á cada poder del Estado un límite en la acción de otro poder; á establecer dentro de la esfera de actividad del Estado una balanza de sus propias fuerzas, fundada en el temor de abusos contra la libertad de los ciudadanos.

Pudo bastarle á la Ciencia Constitucional considerar el princi-

pio de la división de los poderes como la mejor garantía de la libertad política, pero la Ciencia de la Administración estudia bajo otro aspecto las cosas. Mira por todas partes en el Estado y encuentra órganos políticos de administración que, en las diversas esferas desenvuelven conjunta ó separadamente facultades iguales ó semejantes; combinan con libertad su acción, mezclan ó entrelazan sus esfuerzos, se reparten, en suma, elementos diversos de una sola ó varias tareas á la vez, bajo una dependencia más ó menos directa ó lejana, expresa ó tácita de la voluntad popular.

Decimos que nos parece incompleta la teoría de la división de los poderes, y es justo que presentemos brevemente las observaciones que nos sugiere, para pasar en seguida á la exposición de la doctrina que conceptuamos más exacta y comprensiva acerca de las funciones y los órganos en la Administración del Estado.

" Tres grandes poderes, decía Aristóteles, entran necesariamente en la organización de una república, y el deber de un sabio legislador es ponerlos en armonía con la especie de gobierno. Si estos poderes están bien ordenados, el gobierno será bueno y la diferencia de su organización indicará la de las repúblicas. Estos poderes son: primero, el poder legislativo; segundo, el poder ejecutivo considerado en sus atribuciones y la elección de los magistrados; tercero, el poder judicial. "

El oráculo siempre consultado y citado sobre este particular, es el célebre Montesquieu. Si no es el autor de este inestimable precepto de la ciencia política, decía Madison en *El Federalista*, tiene al menos el mérito de ostentarlo y recomendarlo del modo más eficaz á la atención de la humanidad. Las máximas han sido tomadas de la Constitución Británica, que el mismo Montesquieu consideraba " como el espejo de la libertad política. " Cuando Montesquieu decía: no puede haber libertad alguna donde los poderes legislativo y ejecutivo estén reunidos en una misma persona ó cuerpo de magistrados, ó si los poderes judiciales no se separan de los poderes legislativo y ejecutivo, no se proponía dar á entender, dice Madison, que estos departamentos no debieran tener alguna ingerencia parcial ó ninguna sujeción en sus actos respectivos. Su sentido, según lo significan sus propias palabras, y aun más concluyentemente, según lo demuestra el ejemplo que tuvo á la vista, no puede importar sino esto: que donde *todo* el poder de un departamento se ejerce por las mismas manos que poseen *todo* el correspondiente á otro, quedan allí subvertidos los principios fundamentales de una constitución libre.

"No se negará que el poder es de naturaleza usurpadora y que debe evitarse eficazmente que ultrapase los límites que le están señalados. Después de deslindar en teoría las diversas clases de poderes, la tarea siguiente y más difícil es establecer alguna seguridad práctica respecto á cada poder, contra los avances de los demás. Cual deba ser esta seguridad, es el gran problema á resolver. ¿Bastará acaso designar con precisión los límites de estos departamentos en la constitución del gobierno y confiar en estas barreras de pergamino contra el espíritu usurpador del poder?.... La gran seguridad contra la concentración gradual de los diversos poderes en un solo departamento consiste en que tengan los que administren cada uno de éstos, los necesarios medios constitucionales y motivos personales, para resistir las usurpaciones de los otros.... Debe procederse de modo que la ambición contenga á la ambición. El interés del hombre debe identificarse con los derechos constitucionales de su puesto.... Al formularse un gobierno que ha de administrarse por hombres, la gran dificultad está en esto: debéis primero habilitar al gobierno para reprimir á los gobernados, y, en seguida, obligarlo á reprimirse á sí mismo. La dependencia del pueblo es sin duda la represión primaria sobre el gobierno; pero la experiencia ha demostrado á la humanidad la necesidad de precauciones auxiliares.

La política de suplir por intereses opuestos y rivales la falta de mejores motivos, podría descubrirse en todo el través de los negocios humanos, tanto privados como públicos. La vemos ostentarse especialmente en todas las distribuciones subalternas del poder, donde el objeto constante es dividir y arreglar los diversos cargos públicos, de modo que cada uno pueda ser un freno sobre el otro; que los intereses privados de cada individuo sean un centinela sobre los derechos públicos. Estas invenciones de la prudencia no pueden ser menos necesarias en la distribución de los poderes supremos del Estado." (1)

Vivimos hasta ahora bajo el imperio de la clasificación de Aristóteles, repetida por Montesquieu ó preconizada por éste al estudiar la Constitución de Inglaterra, como una garantía de la libertad, y reconocida además, hoy casi por todos, como una base fundamental de buena administración. Los tres grandes poderes entran actualmente en la organización del Estado: el legislativo, el

(1) Madison: *El Federalista.*

ejecutivo, el judicial; los tres se encuentran organizados en la mayoría de las Constituciones escritas, según los aforismos de Montesquieu.

De esa división clásica de los poderes no ha salido aún la ciencia. Las nuevas clasificaciones parecen no haber hecho más que confundir facultades ó indicar como nuevas las que están incluídas en la designación genérica de Aristóteles, Locke y Montesquieu, según el sentido genuino de las palabras.

Pero esta división de los poderes toma como base un criterio *de garantía para la libertad* que aparece como fundamental en el Derecho Constitucional; un contrapeso ó balance de poderes; arranca de esta proposición referente á la conducta humana: "nada hay de más seguro que la mediana de los hombres se deje guiar por intereses y sobre todo por sus intereses aparentes. La legislación política está plagada de disposiciones que no tienen otro alcance que prevenir los efectos perniciosos de esa tendencia. Ella determina el modo de acción de las formas de gobierno." (1)

La división de los poderes, tal como se expone generalmente en el Derecho Constitucional, se funda, pues, en recelos y desconfianzas, en la ponderación de fuerzas inclinadas al abuso, y esta ponderación se hace depender de un arreglo mecánico de las facultades que se atribuyen á los tres poderes.

Algunos escritores han presentado la Constitución de los Estados Unidos del Norte como el modelo de las teorías de Montesquieu sobre la división de los poderes.

Pudo ser al principio esa Constitución un espejo fiel de las doctrinas del publicista francés, mas el molde fué de seguida encontrado estrecho, y á poco andar algunas piezas de la máquina quedaron modificadas y el engranaje tan cambiado en sus movimientos, que ni el Ejecutivo, ni el Senado, ni el Poder Judicial de la Unión son lo que la Constitución quiso que fueran, según las inspiraciones bebidas en Montesquieu y en Blackstone. Las interpretaciones, la legislación de los Estados, los usos, el derecho complementario, las enmiendas han cambiado la estructura política, dándole nuevo aspecto en todo lo que va del siglo.

La Convención de Filadelfia había empezado por declarar que la división de los poderes no excluía la acción parcial ni la influencia recíproca de los diferentes poderes unos sobre otros. La

(1) Spencer: *Justice.*

Constitución de Nueva Hampshire estableció que los poderes ejecutivo, legislativo y judicial deben estar separados y ser independientes *tanto como lo permitan la naturaleza del gobierno libre y tanto como esa separación sea compatible con el lazo indisoluble de unidad y de amistad que debe encadenar toda la organización constitucional*

Y Madison, suavizando la crudeza del absolutismo doctrinario de las máximas de Montesquieu, demostraba que " á menos que estos departamentos del Gobierno *estén tan relacionados é intermezclados* que cada uno tenga un contrapeso constitucional sobre los demás, el grado de separación que la máxima reclama como esencial á un gobierno libre, *no puede mantenerse jamás debidamente en la práctica.* "

III

SUMARIO: La teoría del *Espíritu de las leyes* y el espectáculo que presentaba la Constitución inglesa.—El estado constitucional de Inglaterra en el siglo XVIII según Gneist; el rey en el Parlamento, el rey en el Consejo privado; composición de este Consejo: el *Self government.*— Lo que no aparece en la obra de Montesquieu.— La división de los poderes como concepto formal y abstracto; distribución orgánica de los poderes; elaboración de la estructura política.

Lo curioso es que cuando Montesquieu investigaba *las leyes que forman la libertad política en su relación con la Constitución* (1), y presentaba á la Inglaterra como la nación modelo y el dechado en materia *de división de poderes*, la Inglaterra ofrecía un espectáculo distinto del que resulta de la teoría del eminente autor del memorable *Espíritu de las leyes*. La Cámara de los Pares era una corte de justicia; la de los Comunes se reservaba el conocimiento de ciertos crímenes, y el Poder Ejecutivo intervenía en la formación de las leyes (2).

El mismo Montesquieu reconoce que hay tres casos en que el poder de juzgar puede residir en la legislatura; los nobles deben

(1) Es el título que lleva el libro XI en *El Espíritu de las leyes*.

(2) E. Laveleye: *Le gouvernement dans la démocratie.*

ser juzgados por la Cámara de nobles. Las leyes pueden resultar en muchos casos de un rigor extremo en su aplicación; entonces la autoridad suprema legislativa modera la ley en favor de la ley misma; y por último, el Poder Legislativo es parte acusadora cuando en los asuntos públicos se violan los derechos del pueblo. Si bien concede al Ejecutivo el derecho de veto, no le permite mezclarse en el debate de los asuntos, ni siquiera es necesario que proponga ó inicie. Las demás reflexiones en que entra el ilustre autor, se refieren á la manera de funcionar los Poderes, y no á su división.

Para saber cuál era realmente la organización del Estado, ó la Constitución de Inglaterra, que Montesquieu teorizó, hay que recurrir al más eminente entre los profesores modernos que se han ocupado del asunto, á Gneist.

" *El estado constitucional del siglo XVIII en Inglaterra,* — imagen de una constitución libre, reproducida de una manera incesante en el mundo civilizado, — consiste en la reunión *de las relaciones de clases* en un parlamento compuesto: del rey, los lores eclesiásticos y temporales de la cámara alta, los representantes de los comunes en la cámara baja (1).

...... el parlamento va unido á una reyecía que posee los derechos gubernamentales en su integridad; derechos que no son emanación de los derechos parlamentarios, sino *poderes primitivos del rey.* Estos poderes continúan subsistiendo, siempre extendidos, restringidos, modificados *por la legislación* y por consiguiente, por *el rey en parlamento (King in Parliament),* pero dependiendo sin embargo, en sus partes fundamentales, de lo que ya pertenece á la constitución ante-parlamentaria, al *common-law.* Estos poderes administrativos se han dividido en una serie de autoridades constitucionales (cortes); en otras, formadas recientemente, por resoluciones del Parlamento *(parliamentary boards),* y en otras formadas por la práctica de la administración ministerial (secretarios de Estado y otras). Estos poderes se concentran finalmente en el *King in council:* el rey como jefe del Poder Ejecutivo (según la expresión interpolada posteriormente).

El Estado inglés es, pues, una monarquía en un doble organismo, como *rey en el Parlamento* y como *rey en su Consejo.* Es decir: que el rey está ligado en el ejercicio del poder público sea

(1) Gneist: *La constitution communale de l'Angleterre.*

por *el asentimiento del uno*, sea por *el dictamen ó la refrendación del otro*. Es esto lo que ha mantenido constantemente en el gobierno del Estado la unidad, fundada en la edad media.

Durante cuatro siglos el *privy council* ha servido de base necesaria á esta organización pública. Comprendía, en los grandes funcionarios aislados, á los jefes de la administración del Estado, con poderes que se pueden comparar á la posición de los jefes en los departamentos modernos del Gobierno.

" *Comprendía al mismo tiempo bajo su forma colegiada y por la cooperación de los Jueces reales, las garantías de un modo de Gobierno fijo, constante y constitucional. Durante siglos los Chief Justices (Grandes Justicias ó Jueces Supremos), y otros jueces, — juntos ó separadamente, — fueron en parte miembros, en parte ejecutores y auxiliares abnegados del gobierno del reino.... En el "privy council" se formuló la larga serie de leyes orgánicas sobre las cuales reposa el self government inglés, todo el edificio interior de la organización pública....* "

Montesquieu no nos ha enseñado nada de esto. Ha *teorizado* sobre los resultados que tenía delante; ha creído *descubrir la libertad política* como entidad aparte, y se ha propuesto explicarla por medio de una disertación abstracta sobre la división de los poderes, diluída en un estilo sutil y admirable.

Pero la organización de las comunas que, como demuestra Gneist, forma la raíz verdadera de la vida de esa Constitución y es la fuerza creadora indestructible que ha hecho surgir la armonía de los órdenes, la Cámara de los comunes, la Cámara de los lores, el conjunto de los derechos parlamentarios, el sentimiento constante de su importancia y de su justo ejercicio, la libertad política y la energía moral de la nación: todo eso que era visible en el siglo XVIII, no aparece para nada en la obra de Montesquieu.

No se nos tache de irreverencia hacia el gran publicista francés. La división de los poderes, tal como viene formulada en el *Espíritu de las leyes*, es, — hablando el lenguaje de las escuelas modernas, — una división exterior y *formal* de las fuerzas políticas; es una división *aparente* y á la vez una concepción *abstracta* de las funciones del Estado. Montesquieu no nos ofrece *la distribución orgánica de los diversos poderes* del Estado, *penetrándose los unos á los otros*, tal como se ofrecían en la trabazón viviente del Gobierno cuando su estancia de dos años en Inglaterra.

" *La Constitución y la Administración se penetran,* dice Gneist, *no según un sistema mecánico de repartición,* sino según una ley igual que hace concordar el poder social de la propiedad, sus deberes públicos, sus derechos políticos correspondientes, y le dan así un reconocimiento general como derecho público.... *La fuerza interna de semejante vida pública reposa en que ella dirige toda la educación del pueblo hacia el Estado;* que en el lord y en el gentleman, como en el terrateniente y en el obrero despierta el sentido verdadero por la vida pública; que une bajo este aspecto todas las clases, dando ante todo á las clases superiores las tendencias viriles y el impulso; que busca el valor y la fuerza en lo que el hombre es en el *Estado*....

" Esta educación *para* el Estado ha fundado la grandeza de Inglaterra, como en otro tiempo la de Roma. Cada cosa en particular es allí sencilla, sobria y seria como en la antigua organización romana, *bien lejana de las imágenes brillantes* que en su época esparcieron en Europa de Lolme y el autor del *Espíritu de las leyes.* Pero estas instituciones sencillas son firmes y permanentes, y en la hora del peligro, de la prueba por los grandes deberes, muestran todo el empuje y la grandeza del carácter de una nación altiva y libre. "

Hémonos parapetado tras la indiscutible autoridad del profesor alemán que ha pasado en Inglaterra algunos años de su vida, consagrado al estudio de su historia y sus instituciones, para notar el vacío en la obra tan justamente celebrada del barón de Montesquieu.

Síguese repitiendo la teoría de la división de los Poderes en todas las obras de importancia y por publicistas de nota, sin advertir que lo más interesante en la vida de los Estados, del punto de vista de la libertad social y de las garantías políticas, no es por cierto esta abstracción de la división del Estado en tres poderes, sino la distribución orgánica y el ejercicio compenetrado y armónico de las diversas funciones del Estado que responden á la índole, á las necesidades y supremos ideales del organismo social.

El verdadero baluarte de la libertad no consiste tan sólo en el arreglo mecánico de los poderes del Estado, sino en un *régimen genuinamente representativo de los intereses y aspiraciones de los pueblos,* elaborado y practicado á semejanza del *self government.* Lo que queremos dejar bien establecido es: que con proclamar y

consagrar *hasta cierto punto* el principio de la división de los poderes, como entendía Madison, tenemos apenas una de las bases generales del gobierno, y una de las garantías en favor de la libertad. La estructura política de los pueblos obedece á varias leyes, y no á un solo principio y menos al principio exclusivo de la división de los poderes; las formas de organización política, que han dado por resultado la efectividad en el goce normal de las libertades populares, no provienen de combinaciones equilibristas ó ponderaciones preconcebidas ó contrapesos exteriores y formales, consagrados en las constituciones como frenos de uno á otro poder.

Los pueblos desenvuelven espontánea ó reflexivamente, según su índole y las necesidades y aspiraciones de su organismo, una fuerza interna propia, bajo el influjo del medio ambiente, y elaboran su estructura política dentro y *fuera* del molde trazado en sus constituciones escritas ó en las leyes de carácter constitucional, sin que pueda considerarse como panacea el principio llamado de la división de los poderes.

IV

SUMARIO: Leyes biológicas del desarrollo de los organismos aplicadas al Estado.—División fisiológica del trabajo; génesis de las divisiones del poder según Vivien.—Evolución de las funciones y de los órganos políticos; opinión de Gumplowicz; leyes á que están sometidas las funciones del Estado.—Unidad esencial del poder del Estado; equilibrio orgánico de sus funciones.—Indicaciones sobre la aplicación de las teorías de Montesquieu en los Estados Unidos del Norte: el Senado y el Poder Judicial; la Corte de reclamos; el equilibrio orgánico en los Estados Unidos.

Según el concepto que hemos llegado á formar de la naturaleza del Estado, del contenido específico de la Administración Pública, del Derecho Administrativo, las facultades del Estado se diversifican siguiendo una ley biológica inherente á todo organismo. " Todo organismo, por superior ó elemental que sea, se descompone en funciones que vienen á ser otras tantas direcciones de una actividad fundamental en sentido de la satisfacción de sus necesidades. " Los organismos pasan, según Spencer, de la ho-

mogeneidad indefinida é incoherente, á una heterogeneidad definida y coherente "que produce en los seres individuales la diferenciación de las funciones, y en su consecuencia, la especificación de los órganos. Esta ley en el organismo social, como en el organismo político, es *la ley de la división del trabajo;* la misma que nadie desconoce en la esfera económica y la misma que hace apenas medio siglo transportó Milne Edwards á los dominios de la biología, llamándola *división fisiológica del trabajo.* Proclamóla como un principio en el desarrollo de los animales y reconoció el paralelismo que existe entre la economía vital y la economía social. Ese principio se aplica igualmente á la parte gobernante de la sociedad y á sus relaciones con las otras partes del cuerpo social." El mismo Spencer reconoce que la especialización y la limitación que resultan del cumplimiento de esa ley biológica se producen normalmente en *las estructuras regulativas,* como en todas las otras estructuras sociales, que esta especialización y esta limitación son provechosas, y todo cambio en dirección opuesta constituye un retroceso.

Las divisiones del poder son en un principio obra de la necesidad. El soberano, rey ó pueblo, agobiado con el peso de deberes que sobrepujan á sus fuerzas y que no puede descuidar sin exponerse á quejas importunas para el mismo despotismo; falto de apoyo, de instrumentos y de consejos; extraviado por la ignorancia ó por pasiones que ningún freno reprime, marcha al azar, sigue su capricho y no retrocede ni aun ante la violencia.... Para aligerar una carga demasiado pesada, para disipar las alarmas, restablecer el movimiento, prevenir las resistencias, se concede, en primer lugar, á lo más caro para los ciudadanos, á sus propiedades, á su libertad, á su vida, *la protección de una autoridad especial....* (1)

Con estos enunciados nos es permitido afirmar del punto de vista administrativo, que las funciones en el organismo político se dividen obedeciendo á una ley de crecimiento evolutivo del mismo; se dividen y especializan por una exigencia vital, por una ley natural de todo desenvolvimiento orgánico.

Y así como en los animales de especies inferiores la estructura es sencilla, son pocas sus necesidades y hay pobreza de funciones, en los animales de especies superiores, una estructura com-

(1) Vivien: *Estudios Administrativos.*

plicadísima y lo complicado de sus funciones revelan la superior complicación de sus necesidades en esferas más amplias ó más comprensivas de la vida. Con los organismos de los Estados pasa cosa igual. Al gobierno rudimentario, informe, cuando son limitadas las necesidades de la sociedad política, corresponden pocas funciones de sencillo mecanismo. Cuando la estructura gubernamental se complica porque las necesidades del organismo social son más heterogéneas, las funciones aparecen más divididas, más especializadas, y en relación con esa heterogeneidad de funciones se forman ó constituyen los órganos adecuados para su desempeño, sin que en el organismo político, lo mismo que en el fisiológico y social sea necesario para que una función exista y se cumpla normalmente, que se encarne en un órgano específico. La historia y la experiencia de todos los días nos enseñan que hay funciones diversas acumuladas en un solo órgano político, sin que las funciones se desnaturalicen ni se perturbe la actividad vital. Cuando la función adquiere cierto grado de desarrollo y de intensidad, busca el órgano propio, y mientras éste aparece en toda su individualidad específica, otro ú otros órganos han tenido á su cargo aquellas funciones. Las funciones se modifican y especializan siguiendo el crecimiento social: los órganos políticos aparecen al principio confundidos ó concentrados; siguen poco á poco el proceso evolutivo de las funciones. La división ó separación de los poderes, más es una consecuencia ó un resultado de la ley que acabamos de indicar y que preside al desenvolvimiento orgánico del Estado, que un principio de organización derivado de la naturaleza de éste.

" La separación de las funciones se produce, ante todo, gracias á la necesidad real de la división del trabajo en un grande y complicado *todo* político; pero luego esta separación de las diversas funciones del poder del Estado, originada de la manera referida, exterioriza también sus beneficiosas consecuencias, las cuales están siempre enlazadas con una división del trabajo *allí donde la misma ha sido producida respondiendo á la necesidad* (1) ....

La separación de los poderes, ó mejor dicho, la localización de las distintas actividades ó funciones del poder del Estado en particulares órganos políticos se realiza por sí misma en la medida que lo exige la necesidad de la división del trabajo, por conse-

(1) Gumplowicz: *Derecho Político.*

cuencia de la complejidad de asuntos y del excesivo trabajo de algunos órganos particulares.

Pero estas funciones específicas del Estado que se van manifestando á medida que se opera el desarrollo del mismo, ó sea á medida que las necesidades sociales y las propias del Estado se aumentan ó diversifican; estas funciones, son al fin y al cabo facultades que se acentúan, constituyendo entidad por el principio de autonomía; y se ponen en acción para realizar el fin jurídico, ó los fines del Estado, y por lo tanto, " *la unidad* con que el derecho quiere ser realizado impone también *una unidad* de carácter, de matiz y de dirección á las funciones específicas. Del choque ó desarmonía entre las funciones sólo resulta la perturbación de la vida jurídica. " Hay, y debe haber, pues, correspondencia entre las funciones; cooperación en el trabajo de los órganos; armonía y unidad final en las tareas diversas que estos órganos cumplen para subsistir ellos mismos y para que la sociedad á quien sirven goce con toda seguridad y amplitud de las condiciones inherentes á la vida de Derecho, ó se desarrolle bajo el régimen del Derecho.

Estas leyes de cooperación, de subordinación, de jerarquía, de armonía y de unidad, reconocen como base el principio de autonomía de los organismos y resultan de la propia naturaleza del Estado como ser orgánico, como cuerpo complejo. Realmente, el poder de este organismo no se divide; mejor dicho, " el poder del Estado es siempre en el hecho, único, si bien se puede manifestar en las más varias direcciones según los momentos de su actividad, según las distintas necesidades de lugar y tiempo, como en las direcciones deliberante, ejecutiva, judicial, administrativa, ó en la legislativa, en la económica, de policía, etc.; pero en el fondo permanece siempre el poder *uno, indivisible y soberano,* que puede muy bien distribuir su actividad simultáneamente entre distintos órganos, pero que á pesar de esto, ni se *separa* totalmente, ni se *divide* por completo en ninguna función.

Añádase á esto, que el equilibrio de las funciones es necesario á la salud de todo organismo; lo es á la salud del organismo social y al bienestar de sus miembros, debe serlo también para la conservación del organismo político y el funcionamiento ordenado de todos sus órganos. El equilibrio no se mantiene sino por órganos intermedios de relación, que evitan los choques violentos y suavizan los rozamientos á favor de cierta ligazón, compenetración y

armonía, obedeciendo á las leyes de cooperación y colaboración en las funciones, lo que da por resultado la regularidad de las mismas; y como la actividad de los órganos está encerrada dentro de ciertos límites vitales, resultan de suyo restricciones naturales; resultan espontáneamente del movimiento funcional de todos los órganos contrapesos y barreras insalvables que redundan en beneficio de la tarea general del organismo y de la que incumbe á cada órgano en particular.

Si más que á la teoría nos ajustáramos á la realidad palpitante de los hechos, podríamos encontrar la confirmación de que la doctrina clásica de la división de los poderes es insuficiente aun en aquel país que fué el primero en poner en práctica las máximas de Montesquieu. Éste establecía dogmáticamente que el Poder Ejecutivo debía estar separado del Legislativo hasta el punto de no consentir que el Ejecutivo tomase parte en los debates del Legislativo.

Así se ha practicado en los Estados-Unidos con breves interrupciones. La naturaleza de las cosas ha echado por tierra la división ideológica de los poderes y ha buscado una válvula de escape para esas relaciones inevitables de poder á poder. La práctica cotidiana de los negocios públicos resultaba imposible con semejante separación ó aislamiento del Ejecutivo y del Legislativo. El Ejecutivo, como indicaba Montesquieu, no enviará sus ministros á las Cámaras como sucede en Estados Unidos bajo el *régimen presidencial*, pero en cambio las necesidades de la ley de cooperación de los órganos políticos obligará á enviar los ministros á los *Comités* en que se dividen ambas Cámaras, especialmente la de Diputados, para el cumplimiento de las funciones legislativas. En vez del debate, de la información, de la colaboración pública y solemne del Poder Ejecutivo ante el Congreso en el régimen parlamentario, puro ó mixto, tendremos las intrigas, las cábalas, el *lobby* con todas sus maniobras indecentes; en vez de la iniciativa en las disposiciones de mayor urgencia cuya oportunidad puede apreciar el Ejecutivo con general acierto, tendremos una legislación que se incuba subterráneamente en el seno de los Comités y pasa después á la Cámara de Diputados convertida, según Wilson, " en *un mecanismo* para hacer las leyes,—mudo y sordo,—que funciona bajo una dirección anónima ", ó bajo las maquinaciones del *lobby*.

La separación de los poderes á lo Montesquieu ha traído en Estados Unidos, cuando se la ha seguido estrictamente, una lucha

incesante entre el Ejecutivo y la Cámara de Diputados, y los ardores y complicaciones de la lucha se han extendido hasta el Senado. El Senado, con cuya organización y funciones ni soñó siquiera Montesquieu. El Senado rompe con el principio de la separación de los poderes; es realmente, por su composición y por las facultades de carácter administrativo que ejerce, un órgano poderoso de gobierno, una *creación original,* según el dictamen de los profesores y tratadistas más ilustres; " es el producto más perfecto de nuestra política ", exclama Wordraw Wilson. Interviene por la Constitución y por otras leyes orgánicas en el nombramiento de ministros, embajadores, cónsules, *jueces de la corte suprema y otros jefes superiores de administración.*

Nadie negará la importancia de esta intervención del Senado en los nombramientos de empleados superiores de administración.

Es una demostración bien clara de que no se puede sustraer el Gobierno del Estado á la ley de colaboración ó coparticipación de los diferentes poderes ú órganos de actividad política.

El Senado es además Tribunal en el juicio político (*impeachment*), esa arma tan pesada y poco manejable como un cañón de cien toneladas, según Brice; y que bien puede pasar á un museo de antigüedades constitucionales, según Boutmy, porque es inútil en la práctica corriente de los parlamentos, y es una amenaza ridícula, contra los avances del Ejecutivo en los días de tormenta política.

Más eficaz que el juicio político resulta el régimen de las interpelaciones y de las investigaciones parlamentarias, cuya legitimidad han negado los que aceptan como modelo el régimen teórico de la división de los poderes en el gobierno presidencial.

Desde 1789, ejerce el Parlamento inglés de una manera inconcusa la facultad de investigación sobre los actos y procederes del Ejecutivo. Pudiera decirse y se ha dicho por eminencias, — que ésta es una invasión del parlamentarismo exagerado, considerando las cosas de un punto de vista doctrinal, pero los ingleses entienden, como dice May en la Historia Constitucional de Inglaterra, " que el pueblo entero está, por decir así, presente en el Parlamento para tratar los asuntos de más trascendencia por su carácter general y cuidar y vigilar los intereses más preciosos de los ciudadanos; el Parlamento es un órgano que debe ilustrar y educar, y sin que sea en todos los casos un espejo fiel de la opinión popular en sus diferentes matices, es, y debe ser, una

fuerza eficiente de conducta para dirigir el gobierno del país conforme á las mejores, más inteligentes y sabias opiniones, aunque estuviesen en oposición con preocupaciones populares ó con ideas superficiales que puedan accidental ó temporariamente predominar en la Nación (1).

Esta preciosa facultad de interpelar y de investigar que es característica de las asambleas representativas, adquiere doble importancia en los pueblos que están aún sofocados por un régimen presidencial absorbente, y pueden invocar el ejemplo de la nación que les ha servido de modelo. La facultad de investigar, sea cual fuere su alcance en la esfera política y con relación al Ejecutivo, la tienen y la ejercen ambas Cámaras en Estados-Unidos, por medio de Comités especiales, con facultad de citar Ministros, aunque éstos puedan declinar la comparecencia. Nuestro propio régimen constitucional ha permitido introducir la práctica saludable de las interpelaciones, que no son más que un medio de obtener explicaciones y un ejemplo de que no es inútil la facultad de investigar, ni el control de la opinión sobre el Gobierno.

Pero hay en la organización Americana del Norte algo tan original como la creación del Senado, y es la institución del Poder Judicial con la facultad de anular, á requisición de parte y en cada caso concreto, las disposiciones de carácter obligatorio que sean contrarias á la Constitución. Tocqueville ha podido decir que ninguna nación en el mundo había organizado hasta entonces el Poder Judicial como los norte-americanos. Y Sumner Maine agrega que el éxito de la experiencia deslumbra por su novedad, aunque los precedentes de la institución pudieran encontrarse en Inglaterra. ¿Se considera la institución como el más bello florón de la corona de Montesquieu? Pues, habrá que agregar que la organización de los Estados-Unidos se ha completado después en sentido opuesto con la institución de la Corte de reclamos que determina una jurisdicción aparte para todas las demandas contra los Estados-Unidos, fundadas en leyes del Congreso ó en reglamentos del Poder Ejecutivo ó en contratos por el Gobierno celebrados, entendiendo esta Corte *en todas cuantas reclamaciones y asuntos le envíen las dos Cámaras del Congreso,* y en los asuntos de tierras y financieros con los Indios, interviniendo así en importantes detalles de la administración, hasta el punto

(1) Todd: *El Gobierno parlamentario en Inglaterra.*

de utilizarla el Ejecutivo como si fuera realmente un Consejo de Estado. La Corte de reclamos resulta un órgano de naturaleza mixta, con funciones judiciales y administrativas, un órgano intermedio de asesoramiento y de consejo, con completa autonomía en sus relaciones *directas* con el Congreso y con el Ejecutivo, aunque sus fallos pasen por la revisión de la Corte Suprema de los Estados-Unidos.

Todas estas observaciones concurren á demostrar que con la sola división de los Poderes tal como Montesquieu la dejó formulada en su célebre obra, no obtendremos la garantía que él creyó haber encontrado para la libertad política.

Para obtener regularidad en el funcionamiento de los varios poderes del Estado, no es tan necesario separarlos como intermezclarlos; deben especializarse las funciones, pero hasta cierto punto, no más, tratando de que no se rompa el equilibrio de fuerzas. Este equilibrio, para que sea estable, debe ser constituído por órganos; y la experiencia de todos los días enseña que no se requiere que esos órganos tengan una independencia completa, ni que obren constantemente por separado. Los contactos son una necesidad imperiosa en la vida de relación de los poderes políticos. Es así como se evitan los choques violentos y las actitudes extremas.

La Administración del Estado, en sus diversas esferas y en la múltiple variedad de órganos administrativos comprendidos en la Nación, debe obedecer á esa misma ley de equilibrio por medio de órganos adecuados que irán surgiendo y transformándose á medida que las necesidades políticas y sociales lo reclamen.

V

SUMARIO: Postulados para la Ciencia administrativa. — Armonía de criterios en el Derecho Constitucional y en el Administrativo acerca de la especialización de funciones del Estado y el equilibrio orgánico de las mismas vivificadas por la opinión pública.

De estos postulados hay que partir para fundamentar en la Ciencia administrativa la teoría de las funciones y de los órganos; la autonomía de las circunscripciones políticas locales, de

los agentes y de las personas colectivas que se requieren para el ejercicio de las funciones administrativas y para la exteriorización de éstas por medio de las magistraturas políticas.

Es un error, demasiado generalizado, por cierto, dar á la cooperación de los órganos políticos sobre la base de su autonomía y de la división del trabajo, la denominación de *división y separación* de los poderes, olvidando, como observa Schäffle, la otra faz del fenómeno: la de la unión, la cooperación y la armonía final en el trabajo.

División, combinada con *unión* del trabajo, es el principio de la tarea de los Ministerios, de las funciones centrales y locales, de las funciones administrativas en general, ya consideradas en conjunto, ya aisladamente. Las funciones administrativas se organizan sobre la base de la autonomía propia y de la división del trabajo, y en sus variadas combinaciones cooperan á un solo é idéntico fin político entre ellas, y con los particulares, como también con órganos autónomos de administración.

La frase *separación de poderes* no se usa con exactitud aun en el caso de que se desee expresar el hecho positivo de la limitación de las varias facultades y competencias, la constitución de contrapesos moderadores, la constricción al acuerdo mediante la coordinación. La fuerza política colectiva de un país, constitucionalmente organizado, no es como la fuerza de una máquina; por el contrario, es una *fuerza espiritual colectiva,* la cual debe ser la resultante de la acción y reacción recíproca, *espiritual,* de fuerzas parciales que tienen existencia por sí propias. Para que esa fuerza obre de un modo normal para el ente colectivo, es necesario que cada órgano tenga bien definida su esfera de acción; se requiere que en el mecanismo político haya resortes impelentes y aparatos refrenadores; que exista cierta rivalidad y un orden tal que las fuerzas parciales se vean obligadas á componerse, á armonizarse de manera que ninguna parte del movimiento colectivo obre en sentido perturbador; que los elementos tardíos resulten excitados, y se pueda obtener un espíritu de moderación, de serenidad y de conciliación (1).

Esta situación de armonía que conserva la independencia en las funciones políticas, y que es á la vez *una necesidad suprema en la vida administrativa de todo Estado,* la expresaba Montesquieu,

(1) Schäffle: *Struttura e vita del corpo sociale.*

sin darle forma orgánica, en estos términos: " Estos tres poderes deberían tener un reposo ó una inacción; pero como por el movimiento necesario de las cosas, están ellos obligados á marchar, deberán necesariamente marchar de acuerdo *(elles seront forcées d'aller de concert).*

La división de las funciones políticas ó de las funciones administrativas es, pues, inseparable de la cooperación, de la coordinación, del equilibrio como leyes de la actividad colectiva y como leyes de la actividad funcional del organismo del Estado.

Esta actividad no puede sustraerse á la especialización, porque las funciones se dividen por necesidades vitales del conjunto que los viejos órganos son incapaces de satisfacer cumplidamente. Pero si no hay un principio de cooperación incesante, de unidad, una ley de coordinación general en la espontánea variedad de la vida política, entonces la sola división de las funciones y el simple ejercicio de los órganos separados, en la esfera propia de cada uno, constituirán un juego arriesgadísimo y violento de poleas locas, cuyo movimiento será en pura pérdida; una tarea de Sísifo, un desconcierto profundo, un despotismo atrabiliario ó una anarquía sangrienta y asoladora.

La actividad del Estado, al especializarse en funciones separadas y al constituirse en órganos específicos, queda, por otras leyes, sometida al equilibrio, á la armonía, á la unidad suprema que enlazan todo el movimiento de los órganos diversos del Estado, respondiendo á la conservación y mejoramiento de la sociedad y de su organismo político; respondiendo á la solidaridad en las relaciones de vida de los órganos del Estado Nacional con los de los demás Estados de radio menor ó menos amplio, como el Estado provincial y el Estado municipal.

La distribución y organización de las funciones del Estado obedecen á las leyes generales de la evolución; no son el resultado de una concepción *á priori*, y escapan por lo común al molde trazado en las constituciones cuando el espíritu del pueblo no se ha elevado ni podido elevarse hasta los ideales de su carta fundamental.

La vida de todo el Estado, ha dicho Persico (1), es la armonía orgánica de todos los poderes.... La vida es siempre una y todos los poderes resultan del poder soberano; pero el distribuir

(1) Persico: *Principii di Diritto Amministrativo.*

naturalmente según las normas propias de cada nación este poder soberano en todos sus órganos subordinados, es el más elevado y difícil problema de nuestros tiempos y de las sociedades europeas; las cuales á diferencia de la Inglaterra, siguieron más bien un movimiento reflejo y teórico que espontáneo y de hecho.

Si la teoría puede hacer alguna cosa en esta materia, es indagar prudentemente cuáles derechos legítimos han nacido en un pueblo y han quedado sin órganos aptos para tutelarlos. La formación de estos órganos y de estos poderes y las formas varias que han de tomar es el arte difícil del estadista y del filósofo; y se alcanzarán estos títulos si en la organización política se sigue la naturaleza viva de las cosas y no se le imponen leyes que sólo son el fruto de una reflexión recelosa y arbitraria y de una ciencia servil y falaz."

Hay, por último, un aspecto bajo el cual podrían coincidir el Derecho Constitucional y el Administrativo, si el primero considera que la distribución y cooperación orgánica de las funciones varias del Estado es una garantía para la libertad de todos.

El Derecho Administrativo que se propone conservar el organismo político del Estado y atender ciertas condiciones esenciales del organismo social; que no lleva, en último término, más objetivo que el servicio de intereses primordiales de la sociedad, la efectiva protección y el goce de todos los derechos y de los intereses legítimos, reconoce también que la separación de las funciones y la especialización de los órganos asumiendo estructuras determinadas que se combinan y entrelazan en la vida del Estado, según las necesidades políticas de la sociedad, son igualmente una garantía de buena gestión en favor de los administrados, y por consecuencia una garantía verdadera de sus libertades, á condición de que todos los resortes administrativos sean movidos, templados, ajustados por la acción enérgica de la opinión pública manifestada por medio de órganos representativos bien caracterizados y mejor encaminados.

Curso de Trigonometría esférica

POR NICOLÁS N. PIAGGIO

Agrimensor y Catedrático de la Universidad

(Continuación)

ARTÍCULO IV

Aplicaciones numéricas en la resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos

62. 1.er CASO.

Datos	Resultados
$a = 86°25'$	$A =$
$b = 76°32'$	$B =$
$c = 101°13'$	$C =$
$R = 10^{m}.00$	$S =$

NOTA. En los datos se cumplen las condiciones exigidas en el número **50**; luego el problema es posible.

Fórmulas que deben emplearse para hallar los ángulos:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}};$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}}.$$

(TABLAS DE VÁZQUEZ QUEIPO)

$a =$ 86°25'	$p =$ 132°05'	L. sen $p =$ L. cos 42°05' $= \overline{1}$'870504
$b =$ 76°32'	$p - a =$ 45°40'	L. sen $(p - a)$ . . . $= \overline{1}$'854480
$c =$ 101°13'	$p - b =$ 55°33'	L. sen $(p - b)$. . . . $= \overline{1}$'916254
$2p$ $=$ 264°10'	$p - c =$ 30°52'	L. sen $(p - c)$. . . . $= \overline{1}$'710153

Cálculo del ángulo A

$\overline{1}$'916254
$\overline{1}$'710153

$\overline{1}$'626407
$A =$ **83°30'40''** $\overline{1}$'870504

$\overline{1}$'755903
$\overline{1}$'854480

$\overline{1}$'901423
L. tg $\frac{1}{2}$ $A = \overline{1}$'950711
625

$\frac{1}{2}$ $A =$ 41°45'20'' 86

Cálculo del ángulo B

$\overline{1}$'854480
$\overline{1}$'710153

$\overline{1}$'564633
$B =$ **75°30'16''** $\overline{1}$'870504

$\overline{1}$'694129
$\overline{1}$'916254

$\overline{1}$'777875
L. tg $\frac{1}{2}$ $B = \overline{1}$'888937
00

$\frac{1}{2}$ $B =$ 37°45'08'' 37

Cálculo del ángulo C

$\overline{1}'854480$
$\overline{1}'916254$

$\overline{1}'770734$
$C = $ **102°26'20"** $\overline{1}'870504$

$\overline{1}'900230$
$\overline{1}'710153$

$0'190077$
L. tg $\frac{1}{2}$ $C = 0'095038$
4992

$\frac{1}{2}$ $C = 51°13'10"$ 46

Cálculo de $2\,\varepsilon$

Fórmula: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\,\varepsilon = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p-c)}$.

L. tg $\frac{1}{2}$ (p .... $= 0'352268$
L. tg $\frac{1}{2}$ $(p-a) = \overline{1}'624330$
$2\,\varepsilon = $ **81°27'20"** L. tg $\frac{1}{2}$ $(p-b) = \overline{1}'721549$
L. tg $\frac{1}{2}$ $(p-c) = \overline{1}'441022$

$\overline{1}'139169$
L. tg $\frac{1}{2}$ ε...... $= \overline{1}'569584$
261

$\frac{1}{2}$ $\varepsilon = 20°21'50"$ 323

Verificación :

$2\,\varepsilon = A + B + C - 180°$; $2\,\varepsilon = 261°27'16" - 180° = 81°27'16"$.

Veremos después esta pequeña diferencia de 4", qué error produce en la superficie.

Cálculo de la superficie S

Fórmula: $S = R^2 . 2\varepsilon'' . \text{sen } 1''$

$S = 100 \times 293240'' \text{ sen } 1''$

L. 100... = 2'000000
L. 293240 = 5'467223
L. sen 1''. = $\overline{6}$'685575

2'152798

$S =$ **142m²1668**

142.1668 77
21
186
24

Nuevo cálculo de S

$2\varepsilon'' = 293236$

2'000000
5'467215
$\overline{6}$'685575

2'152790
77

$S =$ **142m²1642**

142.1642 13
124
6

Para más exactitud, puede evaluarse la superficie con el promedio de las calculadas.

63. 2.º CASO.

Datos	Resultados
$A = 93°27'32''$	$a =$
$B = 76°56'28''$	$b =$
$C = 118°37'56''$	$c =$
$R = 240^m$.	$S =$

NOTA. El problema es posible (**54**).

(TABLAS DE CALLET)

Cálculo de 2 ε

$$A+B+C-180^{\circ}=2\varepsilon, \ y \ 2\varepsilon = \mathbf{109^{\circ}01'56''}$$
$$\varepsilon = 54^{\circ}30'58''; \ 2\varepsilon = 392516''$$

Cálculo de S

Fórmula: $S = R^2 . 2\varepsilon'' . \text{sen } 1''$

	L. 240^2....	4'760422
	L. 392516..	5'593858
$S = \mathbf{109611^{m^2}11}$	L. sen 1''...	$\overline{6}$'685575
	109611,11	5'039855
		11
		44
		40
		40

Cálculo del lado a

Fórmula: $\text{tg } \frac{1}{2} a = \sqrt{\dfrac{\text{sen } \varepsilon \text{ sen } (A-\varepsilon)}{\text{sen } (B-\varepsilon) \text{ sen } (C-\varepsilon)}}$.

	L. sen ε......	$= \overline{1}$'910772
	L. sen $(A-\varepsilon)$.	$= \overline{1}$'798335
	C.to L.o sen $(B-\varepsilon)$	= 0'418535
$a = \mathbf{101^{\circ}22'18''}$	C.to L.o sen $(C-\varepsilon)$	= 0'045910
		0'173552
	L. tg $\frac{1}{2} a$.....	= 0'086776
		29
	$\frac{1}{2} a = 50^{\circ}41'09''$	47

Cálculo del lado *b*

$$\text{Fórmula:}\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}.$$

$b = 86°02'$

L. sen ε......	$=\bar{1}'910772$
L. sen $(B-\varepsilon)$.	$=\bar{1}'581465$ [1]
C.to L.o sen $(A-\varepsilon)$	$= 0'201665$
C.to L.o sen $(C-\varepsilon)$	$= 0'045810$
	$\bar{1}'739812$
L. tg $\frac{1}{2}b$	$=\bar{1}'869906$
	846
$\frac{1}{2}b = 43°01'$	60

Cálculo del lado *c*

$$\text{Fórmula:}\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{}$$

Ejercicio: *Acábese de escribir la fórmula; y calcúlese el lado c, con aquellos logaritmos, aunque se tengan Tablas distintas de las de Caillet.* Si se emplean Tablas con *más* cifras decimales, háganse las observaciones correspondientes.

Nota. En el cálculo anterior hemos hecho uso del complemento logarítmico, pero ha sido por la única razón de que esos complementos están ya calculados en las Tablas de Callet. Á no ser así, preferimos hacer las restas de los logaritmos, evitando así el tener que hacer *dos* operaciones en lugar de *una*, como hay que hacer con el uso del complemento.

64. 3.er caso.

Datos	Resultados
$b = 82°25'$	$B =$
$c = 34°27'$	$C =$
$A = 56°22'$	$a =$
$R = 6366$ Km.	$S =$

1. Estos logaritmos se tienen ya, puesto que procediendo por un método inverso al que se emplea para calcular un complemento logarítmico, se puede también hallar el logaritmo, conociéndose su complemento. Por otra parte, estas reglas son muy conocidas.

Fórmulas: [1]

$$\operatorname{tg} b \cos A = \operatorname{tg} \varphi\,; \qquad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C)}{\cot \frac{1}{2} A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)}\,;$$

$$\cos a = \frac{\cos b \cos (c-\varphi)}{\cos \varphi}\,; \qquad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C)}{\cot \frac{1}{2} A} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+c)}.$$

(Tablas de Vázquez Queipo)

Cálculo del ángulo auxiliar φ

$\varphi =$ **76°29'04"**	L. tg b ..	= 0'875716
	L. cos A.	= $\overline{1}$'743413
	L. tg φ..	= 0'619129
$c - \varphi = -$ 42°02'04"		

Cálculo del lado a

	L. cos b	= $\overline{1}$'120469
	L. cos $(c-\varphi)$ = L. $(\varphi - c)$	= $\overline{1}$'870836
		$\overline{2}$'991305
$a =$ **65°46'10"**	L. cos φ...	= $\overline{1}$'368659
		$\overline{1}$'622646
		409
	65°46'10"	236

Cálculo de $\frac{1}{2}(B+C)$

	L. cot $\frac{1}{2} A$.....	= 0'270980
	L. cos $\frac{1}{2}(b-c)$	= $\overline{1}$'960786
		0'231766
$\frac{1}{2}(B+C) =$ **72°56'**	L. cos $\frac{1}{2}(b+c)$	= $\overline{1}$'718909
	L. tg $\frac{1}{2}(B+C)$	= 0'512857

1. Es de suma utilidad que el estudiante recorra los pasajes en donde fueron obtenidas as fórmulas que se emplean.

Cálculo de $\frac{1}{2}(B-C)$

$$\begin{array}{lr} & 0'270980 \\ \text{L. sen } \frac{1}{2}(b-c) & \bar{1}'609029 \\ \hline & \bar{1}'880009 \\ \text{L. sen } \frac{1}{2}(b+c) = & \bar{1}'930456 \\ \hline \text{L. tg } \frac{1}{2}(B-C) = & \bar{1}'949553 \end{array}$$

$\frac{1}{2}(B-C) =$ **41°40'50"**

Cálculo de B y de C

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = & 72°56' \\ \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = & 41°40'50'' \\ \hline B = & \mathbf{114°36'50''} \\ C = & \mathbf{31°15'10''} \end{array}$$

Cálculo de 2ε

Fórmula : $$\cot \varepsilon = \frac{\cot \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} c}{\text{sen } A} + \cot A .$$

$$\frac{\cot \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} c}{\text{sen } A} = 4.424$$

$$\begin{array}{r} \cot A = 0.6652 \\ \hline 5.0892 \end{array}$$

$\text{L. } \cot \varepsilon = 0'706649$

$\varepsilon = 11°07'$

$2\varepsilon =$ **22°14'**

$$\begin{array}{lr} \text{L. } \cot \frac{b}{2} = & 0'057649 \\ \text{L. } \cot \frac{c}{2} = & 0'508596 \\ \hline & 0'566245 \\ \text{L. sen } A = & \bar{1}'920436 \\ \hline & 0'645809 \\ \text{L. } \cot A = & \bar{1}'822977 \end{array}$$

Verificación

$$A + B + C - 180° = 2\varepsilon = 202°14' - 180° = 22°14' .$$

Cálculo de S

EJERCICIO. *Hágase este cálculo.*

65. 4.º CASO.

Datos	Resultados
$a = 78°27'36''$	$b =$
$B = 56°42'28''$	$c =$
$C = 63°27'43''$	$A =$
$R = 180.^{m}$	$S =$

Fórmulas:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(c+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(C-B)}{\cos \frac{1}{2}(C+B)};$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(c-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(C-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(C+B)}.$$

(TABLAS DE LALANDE)

$\frac{1}{2} a =$	$39°13'48''$	L. tg $= 9'91172 + 21$
$C+B =$	$120°10'11''$	
$\frac{1}{2}(C+B) =$	$60°05'05'',5$	L. cos $= 9'69787 - 2$; L. sen $= 9'93789 + 1$
$C-B =$	$6°45'15''$	
$\frac{1}{2}(C-B) =$	$3°22'37'',5$	L. cos $= 9'99925 - 23$; L. sen $= 8'76883 + 133$

Cálculo de $\frac{1}{2}(c+b)$

	L. cos $\frac{1}{2}(C-B) =$	9'99902
	L. tg $\frac{1}{2} a$ .... $=$	9'91193
$\frac{1}{2}(c+b) =$ **58°31'29''**		19'91095
	L. cos $\frac{1}{2}(C+B) =$	9'69785
	L. tg $\frac{1}{2}(c+b)$. $=$	10'21310
		296
		14

Cálculo de $\frac{1}{2}(c-b)$

$\frac{1}{2}(c-b) =$ **3°10'34"**

L. sen $\frac{1}{2}(C-B)$	=	8'77016
L. tg $\frac{1}{2}a$	=	9'91193
		18'68209
L. sen $\frac{1}{2}(C+B)$	=	9'93790
L. tg $\frac{1}{2}(c-b)$..	=	**8'74419**

Cálculo del ángulo A

Fórmulas:

$$\text{tg } B \cos a = \cot \varphi;$$

$$\cos A = \frac{\cos B \text{ sen } (C-\varphi)}{\text{sen } \varphi}.$$

$\varphi =$ 73°04'28"

$C - \varphi = -$ **9°36'45"**

L. tg B......	=	0'18265
L. cos a	=	9'30115
L. cot φ	=	9'48380
		53
		27

[1] A = 180° − 84°30'08", ó

A = **95°29'52"**

L. cos B.....	=	9'73950
L. cos $(C-\varphi)$	=	9'22267
		18'96217
L. sen φ	=	9'98077
L. cos A.....	=	8'98140
84°30'08"		

1. Téngase presente que sen $(C-\varphi)$ es negativo.

Cálculo de 2 ε

Fórmula:

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(B+C-2\varepsilon)=\sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}a\ \operatorname{sen}C\ \operatorname{sen}B+\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}(C-B)}$$

$\cos^2\frac{1}{2}a \operatorname{sen} C \operatorname{sen} B = 0.4487$

$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(C-B) \ldots\ldots = 0.003391$

0.452091

$L.\, 0.452091 \ldots\ldots = \bar{1}'65523$

$\bar{1}'82761$

$L. \operatorname{sen}\frac{1}{2}(B+C-2\varepsilon) = 9'82761$ [1]

$\frac{1}{2}(B+C-2\varepsilon) \ldots\ldots = 42^\circ 15'$

$B+C-2\varepsilon \ldots\ldots = 84^\circ 30'$

$2\varepsilon =$ **35°40'11"**

$L. \cos^2\frac{1}{2}a \ldots\ldots = 19'77816$

$L. \operatorname{sen} C \ldots\ldots = 9'95164$

$L. \operatorname{sen} B \ldots\ldots = 9'92215$

$39'61595$

$L. R^4 \ldots\ldots\ 40$

$\bar{1}'65195$

0.4487

$L. \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(C-B) = 17'54032$

$L. R^2 \ldots\ldots = 20$

$\bar{3}'54032$

0.003391

Verificación

$$A+B+C-180^\circ = 2\varepsilon = 215^\circ 40'03'' - 180^\circ = 35^\circ 40'03''$$ [2]

Cálculo de S

Ejercicio. *Calcúlese esta superficie, después de haber tomado para valor de 2 ε el promedio entre los dos valores encontrados.*

1. Cambiamos la característica $\bar{1}$ en 9, es decir, replanteamos el radio $R = 10^{10}$ que emplea Lalande en sus Tablas.

2. Debe tenerse en cuenta que, de las Tablas que hasta ahora hemos usado, es la menos aproximada la de Lalande.

66. 5.° CASO.

Datos	Resultados
$a = 38°42'36''$	$B =$
$b = 51°17'42''$	$C =$
$A = 73°46'18''$	$c =$
$R = 1740$ Km.	$S =$

(TABLAS DE CALLET)

Cálculo del ángulo B

Fórmula: $$\text{sen } B = \frac{\text{sen } A \text{ sen } b}{\text{sen } a}.$$

L. sen A	=	9'9823415
L. sen b.....	=	9'8923037
		19'8746452
L. sen a.....	=	9'7961430
L. sen B	=	10'0785022

Por este resultado se ve que los datos del problema son incompatibles (**59**); el problema es absurdo. Pongámoslo con estos nuevos datos:

Datos	Resultados
$a = 36°52'$	$B =$
$b = 40°18'$	$C =$
$A = 61°07'$	$c =$
$R = 1740$ Km.	$S =$

Cálculo del ángulo B

L. sen A	=	9'9423083
L. sen b.....	=	9'8107631
		19'7530714
L. sen a	=	9'7781186
L. sen B	=	9'9749528

$B =$ **70°43'40"**

Se tiene por hipótesis $a \angle b$, y resulta también $A \angle B$; luego el problema es bueno. Según el cuadro visto anteriormente **(60)**, el problema tiene dos soluciones. Sigamos con una.

Cálculo del ángulo C

Fórmulas: $$\frac{\cot A}{\cos b} = \text{tg}\ \varphi;$$

$$\cos (C - \varphi) = \text{tg}\ b \cot a \cos \varphi.$$

	L. cot A.....	=	9'7416638
	L. cos b......	=	9'8823357
$\varphi =$ **35°52'44"**	L. tg φ.......	=	9'8593281
			115
			166
	L. tg b.......	=	9'9284274
	L. cot a......	=	0'1249898
$C - \varphi = 23°36'30"$	L. cos φ......	=	9'9086220
$C =$ **59°29'14"**	L. cos $(C - \varphi)$	=	9'9620392

Cálculo del lado c

Fórmulas: $$\text{tg}\ b \cos A = \text{tg}\ \omega;$$

$$\cos (c - \omega) = \frac{\cos a \cos \omega}{\cos b}.$$

	L. tg b	=	9'9284274
	L. cos A.....	=	9'6839720
$\omega =$ **22°16'33"**	L. tg ω	=	9'6123994
	L. cos a	=	9'9031084
$c - \omega = 13°54'10"$	L. cos ω	=	9'9663149
$c =$ **36°10'43"**			19'8694233
	L. cos b.....	=	9'8823357
	L. cos $(c - \omega)$	=	9'9870876

Cálculo de S

EJERCICIO. *Hágase este cálculo determinando 2 ε por el conocimiento de los tres ángulos.*

Ya dijimos que este problema presenta dos soluciones; los elementos que se encuentran para el segundo triángulo son los siguientes:

$$B_1 = 180° - B = 180° - 70°43'40'' = 109°16'20''.$$

$$C_1 = \varphi - (C - \varphi) = 2\varphi - C = 71°45'28'' - 59°29'14'' = 12°16'14''.$$

$$c_1 = \omega - (c - \omega) = 2\omega - c = 44°33'06'' - 36°10'43'' = 8°22'23''$$

Respecto á que $B_1 = 180° - B$, no cabe la menor duda, puesto que el ángulo B nos vino dado por su seno, y sabemos la indeterminación de este valor.

El ángulo $C - \varphi$ lo conocimos por su coseno, pero sabemos que

$\cos(C - \varphi) = \cos(\varphi - C)$, luego tenemos $\varphi - C = 23°26'30''$ de donde $C = 35°52'44'' - 23°36'30'' = 12°16'14''$.

Lo mismo diríamos de $c - \omega$.

67. 6.° CASO. Recomendamos á los estudiantes que, tomando los datos de uno cualquiera de los cinco problemas resueltos, traten de resolver un triángulo que se halle comprendido en este 6.° caso.

ARÍTCULO V

Varios problemas

68. Problema. *Conociendo las latitudes y longitudes de dos puntos de la superficie de la Tierra, calcular la distancia métrica que las separa.*

Sea PNP' (fig. 14) el meridiano de referencia, R y M los puntos dados en el problema. Se conoce el arco NE, longitud del punto R y NI longitud del punto M; la diferencia de ambos arcos, EI, es la medida del ángulo P del triángulo esférico PMR, que es el

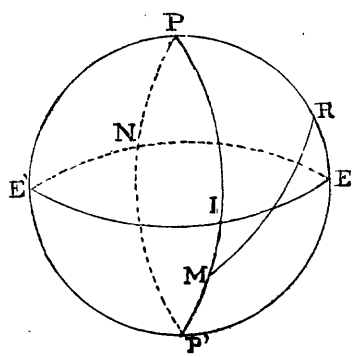


Fig. 14

que se trata de calcular para tener MR. Se ha supuesto en esta diferencia de longitudes, que ambas eran de la misma especie, pero si no lo fueran, como, por ejemplo, NE y NE'I, entonces con el suplemento á 24 horas de una de ellas, se igualan las clases de longitudes, y se procede como antes.

Después, se conoce PR igual al complemento de la latitud de R; también se conoce PM complemento aditivo de la latitud de M ($= 90^{o} +$ latitud).

Luego en el triángulo MPR se conocen dos lados y el ángulo comprendido, luego se puede conocer el valor angular de MR; expresado este valor en segundos, se multiplicará por $30^m,864$, que es el desarrollo de 1" de meridiano (círculo máximo).

EJEMPLO. Longitud occidental del faro de Montevideo (al meridiano de París), 58°35'30" — latitud Sur 34°53'03"; longitud occ. de la Aduana de Buenos Aires, 60°42'29" — lat. Sur 34°36'30"; long. occ. del Observatorio de Río Janeiro, 45°30'35" — lat. Sur 22°54'24". *Se trata de determinar los elementos del triángulo que determinan esos datos, incluyendo entre esos elementos, la superficie del triángulo.*

NOTA. Hay que calcular tres triángulos para resolver el problema propuesto. Será bueno que, como ejercicio, se discuta el problema situando los puntos (que, como es natural, no serán los mismos del enunciado) en diferentes meridianos.

69. PROBLEMA. *Reducir un ángulo al horizonte.* Se conocen las alturas de los lados que lo forman.

(Fig. 15) AB es la medida del ángulo AOB que se va á proyectar, ZB el complemento de la altura BOH del lado OB, ZA otro com-

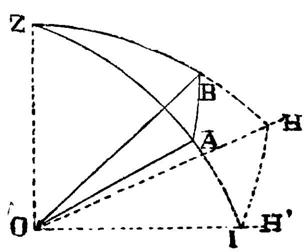


Fig. 15

plemento conocido; luego en este triángulo se conocen los tres lados, y se determina el ángulo BZA medido por el arco IH, que también es medida del ángulo HOH', proyección buscada.

EJEMPLO. AB = 62°25'; AI = 20°16'; BH = 14°40', *proyectar AOB sobre el horizonte.*

70. Problema. *Dado un triángulo esférico, hallar el radio esférico del círculo circunscrito al triángulo.*

Sea el triángulo ABC (Fig. 16), O el centro de la circunferencia circunscrita, OC = OA = OB el radio esférico R que se trata de determinar.

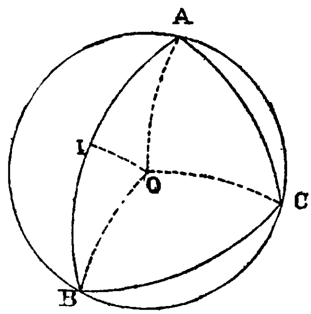


Fig. 16

Cada triángulo OAB, OAC, y OBC es isósceles.

Hagamos OAB = OBA = α; OAC = OCA = β; OCB = OBC = δ. Se tiene $\alpha + \beta = A$, $\beta + \delta = C$, $\delta + \alpha = B$.

Sumando la primera de estas igualdades con la tercera, se saca,

$$2\alpha + \beta + \delta = A + B, \text{ ó } 2\alpha + C = A + B, \text{ y}$$
$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,(A + B - C).$$

Pero $A + B + C = 180^\circ + 2\,\varepsilon$, luego $A + B - C = 180^\circ + 2\,\varepsilon - 2\,C$ y

$$\tfrac{1}{2}\,(A + B - C) = 90^\circ - (C - \varepsilon).$$

Tracemos OI perpendicular á AB, y se tiene aplicando la regla de Neper á los tres elementos contiguos AO, α (= O AI), y AI

$$\cos\alpha = \cot \text{AO} \operatorname{tg} \text{AI}, \text{ de donde}$$

$$\cot \text{AO} = \cot R = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg} \text{AI}}\,.$$

Por otra parte, $\cos \alpha = \text{sen}\,(C-\varepsilon)$, y

$$\text{tg AI} = \text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,c = \sqrt{\frac{\text{sen}\,\varepsilon\ \text{sen}\,(C-\varepsilon)}{\text{sen}\,(A-\varepsilon)\ \text{sen}\,(B-\varepsilon)}}\text{; luego}$$

$$\cot R = \sqrt{\text{sen}^2\,(C-\varepsilon)} : \sqrt{\frac{\text{sen}\,\varepsilon\ \text{sen}\,(C-\varepsilon)}{\text{sen}\,(A-\varepsilon)\ \text{sen}\,(B-\varepsilon)}}\text{, y}$$

$$\cot R = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(A-\varepsilon)\ \text{sen}\,(B-\varepsilon)\ \text{sen}\,(C-\varepsilon)}{\text{sen}\,\varepsilon}}\,.$$

71. PROBLEMA. *Dado un triángulo esférico, hallar el radio esférico r del círculo inscrito al triángulo.*

Se trata de determinar el radio esférico OI (Fig. 17).

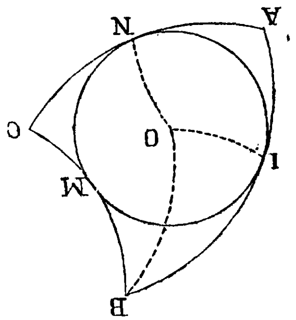


Fig. 71

Uniendo el punto O con B, los triángulos rectángulos OBN y OBI son iguales — tienen tres elementos respectivamente iguales; — luego OBI = OBM y BM = BI.

Del propio modo se demostraría que CN = CM y AN = AI.

Pero la suma de estos últimos seis elementos compone el perímetro $2p$ del triángulo, luego BI + CN + AN = p, luego

$$\text{BI} = p - (\text{CN} + \text{AN}),\ \text{y}$$
$$\text{BI} = p - b.$$

Considerando en el triángulo rectángulo OBI los elementos contiguos OP, IB y el ángulo OBI $= \frac{1}{2} B$, tendremos

$$\text{sen BI} = \text{tg OI cot OBI, de donde}$$

$$\begin{aligned}\text{tg OI} &= \text{tg } r \text{ tg OBI sen BI} \\ &= \text{tg} \tfrac{1}{2} B \text{ sen } (p-b)\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{sen }(p-a)\text{ sen }(p-c)}{\text{sen } p \text{ sen }(p-b)}} \times \text{sen }(p-b)\text{; y por último}$$

$$\text{tg } r = \sqrt{\frac{\text{sen }(p-a)\text{ sen }(p-b)\text{ sen }(p-c)}{\text{sen } p}}\,.$$

APÉNDICE A[1]

Ejercicios de Astronomía

72. CÁLCULO DE LA LATITUD DE UN LUGAR. 1.er MÉTODO. *Por el pasaje del Sol ó de un astro cualquiera, por el meridiano.* REGLA. Se corrige la altura máxima observada, quitándole la refracción, agregándole la paralaje y sumándole ó restándole el semidiámetro según se observó el limbo inferior ó superior del astro. Hecho esto, se toma el complemento y se le agrega ó se le quita la declinación del Sol, siempre que ésta sea Sur ó Norte [2]. (Véanse mis "Apuntes de Cosmografía".)

2.º MÉTODO. *Por la altura del polo sobre el horizonte.* Este largo procedimiento exige dos observaciones *nocturnas* separadas por un intervalo de 12 horas (desde luego ha de ser en la época del

1. En este Apéndice nos ocupamos de cuestiones puramente astronómicas, algunas de las cuales forman parte de la asignatura Topografía que se cursa en nuestra Facultad de Matemáticas.

2. Esta última parte de la Regla se refiere exclusivamente á los países de la Zona templada del Sur y á toda la región de la Zona glacial antártica. Sería conveniente que el profesor generalizara el procedimiento. Nótese que si se trata de una estrella, no hay corrección de paralaje ni de semidiámetro.

invierno), y aun así en condiciones muy excepcionales: que pase la estrella al *empezar* la noche por el meridiano, para que se la pueda ver al *terminar* la misma noche en el otro pasaje por el meridiano. Como se comprende, las estrellas que se observan han de ser de las más brillantes. (Véase mi "Curso de Cosmografía".)

3.er MÉTODO. *Por una altura extrameridiana y la hora.* Suponiendo que tenemos á nuestra disposición un cronómetro cuya marcha haya sido comprobada de una manera absoluta, entonces podremos, mediante la observación de un astro fuera del meridiano, calcular la latitud del lugar.

En el triángulo SZP (Fig. 22) en que Z es el zenit del observador, P el polo Sur (podrá ser indistintamente el Norte, aunque en este caso habrían, como fácilmente se coprmende, algunas modificaciones en los datos y en los resultados), S es el Sol ó un astro cualquiera; en ese triángulo, digo, se conoce: ZS complemento de altura, SP complemento de declinación (véase el cálculo de esta declinación en el *Método* siguiente), el ángulo ZPS por el dato que suministra el reloj-tiempo reducido á arco, — luego en este triángulo ZSP se calcula ZP, que es el complemento de la latitud.

NOTA. Como no se puede tener gran confianza en el reloj, de aquí que sea preferible el *Método* que sigue, donde se salva el inconveniente de la observación horaria con el de la observación azimutal.

4.º MÉTODO. POR ALTURAS EXTRAMERIDIANAS. *(Trabajos de campo).* Sea ZSP (Fig. 18) el triángulo que forman el zenit del lugar, el

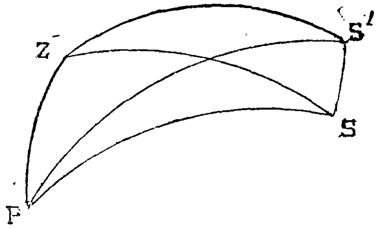


Fig. 18

Sol y el polo Sur. La observación es por la mañana. Sea ZS'P otro triángulo esférico que corta al primero y situado como éste en las regiones celestes.

Datos que se toman en el terreno, tanto en una observación como en la otra: altura del Sol, azimut magnético de su vertical y hora media de la observación. Estos dos grupos de elementos pueden ser promedios de cuatro ó más observaciones. Se ve claramente que la mayor distancia de una observación á la otra (sin promedios) debe ser lo más larga posible; por ejemplo, media hora de la una á la otra, ó bien esa separación de dos inmediatas á otras dos inmediatas. Esto produce un arco SS' más grande y de consiguiente más bien determinado el ángulo SZS'.

El astro que se ha observado ha sido el Sol, pero puede hacerse lo mismo con otro astro cualquiera.

(Trabajos de gabinete). Se corrigen las alturas (que pueden ser las promediadas) como se hizo en el primer método, y se toman los complementos ZS y ZS'; entonces en el triángulo [1] ZSS' se conocen dos lados ZS y ZS' y el ángulo comprendido SZS' por la *diferencia* de azimuts, se calculan por las tercera y cuarta analogías de Neper los ángulos ZSS' y SS'Z, y por medio de la tangente auxiliar (**55**) se determinan al lado SS'.

Se hallan las declinaciones del Sol para las horas en que se observó, tomando la que den las Tablas *(Conocimiento de los tiempos)* á mediodía, medio de París, y corrigiéndolo para la hora del lugar referido á tiempo de París; se toman en seguida los complementos aditivos ó sustractivos de esas declinaciones, — en verano $(90^{\circ} - D)$ y en invierno $(90^{\circ} + D)$ [2]; — se conocen así las distancias polares PS y PS' del Sol en las dos posiciones S y S'. En el triángulo PSS' se conocen sus tres lados, y por las fórmulas deducidas (**50**) se calculan los ángulos S'SP y SS'P.

Por simples sustracciones se conocerán los ángulos ZSP = S'SP — S'SZ y ZS'P = ZS'S — PS'S.

En el triángulo ZSP se conocen así ZS complemento de altura, PS complemento de declinación y el ángulo ZSP, se calcula entonces ZP, que es el *complemento* de la latitud: latitud = 90° — ZP.

Verificación. — En el triángulo ZS'P se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se calcula el lado ZP y ha de dar el mismo valor de antes ó sino muy próximo; en este caso se toma el promedio como verdadero valor de ZP.

1. El lado SS' es un arco de gran círculo celeste que une los centros del Sol en las dos posiciones observadas.

2. Aquí en la República, y en general siempre que se forman los triángulos en el hemisferio Sur.

Nota. — Provistos de un buen cronómetro [1], se puede empezar el cálculo de los triángulos, por el PSS', en el que se conocen los lados PS y PS' como complementos de las declinaciones y el ángulo SPS' por diferencia de horas que se traducen en arco. No es necesario que estas horas estén referidas al meridiano verdadero, puesto que tienen de cualquier modo el mismo plano *de partida*, las verdaderas, el meridiano verdadero, y las medias que son las que da el cronómetro, el meridiano medio, en el día de la observación.

73. Cálculo de la variación magnética. En el triángulo ZSP de la última figura, se calcula el ángulo SZP y su suplemento será el azimut verdadero, la diferencia con el magnético observado nos dará la variación de la barra imanada: será *oriental* si el azimut calculado es mayor que el magnético, y *occidental* en caso contrario. (*Demuéstrese.*)

Verificación. — Hacemos el mismo cálculo en el triángulo ZS'P, hallando así el ángulo PZS', su suplemento será el azimut verdadero del vertical del Sol en la segunda observación y su diferencia con el azimut observado nos dará también la variación magnética. Este valor debe ser igual al anterior; si no lo fuera, pero sí muy inmediato, se calcula el promedio y éste es el número que se adopta.

74. Arreglo del reloj. Se calculan los ángulos en P en los dos triángulos ZSP ZS'P, y se tienen así los grados y subdivisiones de grados que corresponden á las *horas verdadera* en los instantes de las observaciones, se reducen á horas medias (véase un ejemplo á continuación y otro en el número **79** *a*), y se cotejan estas horas con las que marcaba el reloj cuando se observaba: la comparación nos dará el resultado buscado.

1. De cualquier manera que sea el uso de un buen reloj es necesario, pero en cambio si se procede por el método expuesto en el texto, no es tan indispensable que el reloj ande *absolutamente* bien, porque el empleo de la hora es para el cálculo de las declinaciones y éstas varían muy lentamente, sobre todo en la época de los solsticios. Si el punto de observación estuviese fuera de Montevideo, entonces la longitud se estima en el mapa siendo esto otra causa de error, pero pequeña, porque al apreciar en tiempo esta longitud, el error se hace 15 veces menor. Es necesario, pues, para evitar la acumulación de errores, que se tomen todas las precauciones necesarias, haciendo uso de buenos relojes y de buenos mapas.

Ejemplo. *Se pregunta el tiempo medio* (traduzco este ejemplo) *de una observación hecha el 12 de Julio de 1889, á* $4^h 22^m 27^s,17$ *tiempo verdadero, en Wáshington, cuya longitud es de* $5^h 17^m 33^s,1$ *al Oeste de París.*

SOL

JULIO DE 1889

DÍA		Á MEDIODÍA VERDADERO EN PARÍS					
del mes	de la semana	Ascensión recta del Sol	Variación por 1h	Declinación del Sol	Variación por 1h	Tiempo medio	Variación por 1h
		h m s	s	° ′ ″	″	h m s	s
1	L.	6.42.30,32	10,340	+23. 5.35,7	10,49	0.3.36,20	+0,482
2	M.	6.46.38,35	10,328	23. 1.11,8	11,50	0.3.47,64	0,470
3	M.	6.50.46,07	10,315	22.56.23,8	12,50	0.3.58,77	0,457
4	J.	6.54.53,47	10,301	22.51,11,7	13,50	0.4. 9,59	0,443
5	V.	6.59. 0,52	10,286	22.45.35,7	14,49	0.4.20,06	0,428
6	S.	7. 3. 7,21	10,271	22.39.36,0	15,48	0.4.30,17	0,413
7	D.	7. 7.13,52	10,255	22.33.12,7	16,46	0.4.39,90	0,397
8	L.	7.11.19,43	10,238	22.26.26,0	17,43	0.4.49,22	0,380
9	M.	7.15.24,92	10,220	22.19.16,1	18,39	0.4.58,13	0,362
10	M.	7.19.29,98	10,201	22.11.43,0	19,35	0.5. 6,61	0,344
11	J.	7.23.34,59	10,182	22. 3.47,1	20,30	0.5.14,64	0,325
12	V.	7.27.38,75	10,163	21.55.28,5	21,24	0.5.22,21	0,306
13	S.	7.31.42,44	10,144	21.46.47,4	22,18	0.5.29,32	0,286
14	D.	7.35.45,65	10,124	21.37.44,0	23,10	0.5.35,95	0,266
15	L.	7.39.48,38	10,103	21.28.18,5	24,02	0.5.42,11	0,246

Tiempo verdadero de la observación en Wáshington. $4^h 22^m 27^s,7$
Longitud Oeste de Wáshington [1]................... $5^h 17^m 33^s,1$

Tiempo verdadero de París correspondiente..... $9^h 40^m 00^s,8$

Para el 12 de Julio, el tiempo medio á mediodía verdadero es (según se ve en la tabla transcrita) $0^h 05^m 22^s,21$ y la corrección para 1^h es $+ 0,^s 306$; se tendrá entonces:

1. Si fuera Este la longitud, se restaría.

Tiempo verdadero de la observación en Wáshington.	$4^h22^m27^s,70$
Tiempo medio á mediodía verdadero en París, Julio 12......................................	$0^h05^m22^s,21$
Corrección = + $0^s,306 \times 9^h,667$..........	$2^s,96$
Tiempo medio de la observación en Wáshington [1]..	$4^h27^m52^s,87$

Nos conformaremos con este resultado, en vista de que el error que puede resultar con este procedimiento sólo alcanza á un valor *máximo de* $0^s,11$, y esto sólo en algunos casos.

75. Detalles de los problemas resueltos.—Tanto para calcular la latitud como la variación de la aguja, hemos supuesto que la observación se hizo por la mañana. Supongamos, ahora, que una observación se hizo por la mañana y otra por la tarde. El procedimiento en este caso no difiere esencialmente del antes empleado, como se ve en seguida.

(Fig. 19). Los lados ZS y ZS' que forman el ángulo S'ZS son los complementos de las alturas (como antes); este ángulo se obtiene por la *suma* del azimut de la mañana y el *suplemento á 4*

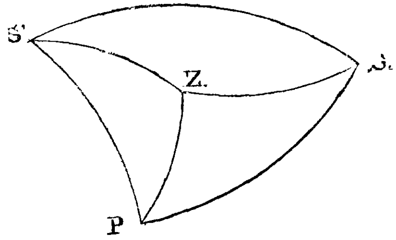


Fig. 19

rectos del azimut de la tarde. Se tienen los elementos necesarios, y entonces se resuelve el triángulo ZSS'; se conocen, pues, los ángulos ZSS' y ZS'S, así como el lado SS'.

En el triángulo SPS', los lados PS y PS' son las distancias polares, el lado SS' se calculó. Este triángulo se halla entonces en las

1. Si esta suma pasara de 24 horas, se le rebajan 12 horas.

mismas condiciones que el del ejemplo indicado en la figura 18. Se determinan los ángulos PSS' y PS'S.

Se hacen dos diferencias de ángulos una en S y otra en S'; se conocen así los ángulos ZSP = S'SP — ZSS', y ZS'P = SS'P — ZS'S (en esta última resta es donde hay una pequeña variante).

Por último, los triángulos ZSP y ZS'P nos dan el elemento ZS con dos valores que, á no ser iguales, pero sí muy inmediatos, se promedian (todo como antes).

a) Cuando se ha hallado el ángulo SZP se tiene el suplemento del azimut verdadero del vertical del astro en la observación de la mañana (como anteriormente); pero al ángulo S'ZP hay que *agregarle 180°*, para tener el azimut de la tarde. Las diferencias respectivas de estos azimuts con los magnéticos observados dan el mismo valor de la variación magnética.

b) EJERCICIO. *Dígase lo que corresponde ante estas observaciones, con respecto al arreglo del reloj.*

c) Si ambas observaciones fueron hechas por la tarde, entonces el diagrama explicativo será el indicado en la figura 20.

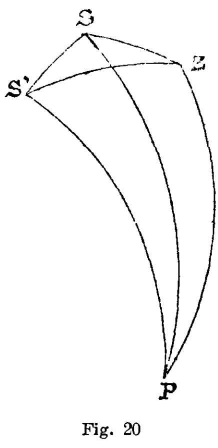


Fig. 20

El cálculo se hace de una manera idéntica al primero. Se determina el ángulo SZP, al que se le *agregan 180°* para tener el azimut verdadero de la primera observación, y lo mismo se hace con el segundo ángulo S'ZP.

Signos de la historia

POR EL DOCTOR DON FEDERICO E. ACOSTA Y LARA

I

Estamos al presente atravesando un período de verdadera edificación filosófica, amparados por nuevos y seguros métodos de investigación científica é impelidos por fuerzas cuya intensidad poderosa y naturaleza peculiar creemos conocer perfectamente.

Y dicho período no es una improvisación en la secuela de los acontecimientos históricos, ni un hecho que carezca de antecedentes y filiación legítima en la historia del pensamiento; no. Es preciso que nos remontemos al pasado para ver en la filosofía Aristotélica, primero, y después en los esfuerzos metodistas de Bacon, el germen lozano de las ideas y principios que en el orden científico y aun vulgar se han adueñado del género humano y le conducen á nuevos destinos.

Es verdad que, como se ha repetido muchas veces por historiadores y filósofos, el presente está ligado á los tiempos anteriores, y por eso debe buscarse la causa de los acontecimientos de ahora en una labor anterior, muchas veces remotísima, ó en un germen perdido con frecuencia en la noche de los tiempos habidos.

Pero ¿qué signos caracterizan nuestra época, históricamente considerada? ¿Qué ideas y qué sentimientos abrazan los cerebros y mueven á los corazones en una constante marea?

Sin duda alguna, hoy como ayer, como en los primeros tiempos de la humanidad, la lucha existe trabada entre las entidades que pueblan el globo. La agitación de la humanidad es la misma; el

esfuerzo por vencer causas perennes de destrucción se hace hoy como entonces, aun cuando con diversa intensidad, porque la intensidad del esfuerzo la gradúan las circunstancias en que éste se produce.

La humanidad ha nacido para la lucha y luchará siempre. Lucharemos nosotros como lucharán los que nos sucedan y como han luchado nuestros antepasados en los tiempos infinitos.

La lucha por la existencia es una ley impuesta al humano linaje, y de la que jamás se emancipará, porque ella responde á producir ventajas evidentes al mismo sujeto colectivo que la soporta.

Pero no obstante la universalidad del principio de la lucha por la vida, es necesario reconocer que sus aspectos son diversos, y que como son diversos hoy comparados con los que ha ofrecido en otros períodos de la historia, serán también diversos para las generaciones del porvenir.

El hombre de las primeras edades; el habitante de las cavernas y de las llanuras pampeanas luchaba materialmente para vivir. Así como un perro disputa con otro perro, diente á diente, la posesión de un hueso, así también el hombre primitivo debió defender la presa adquirida ó disputarla á su congénere.

Nada más primitivo, en efecto, y que mejor ponga de relieve el principio de la lucha por la existencia, así como nada tampoco que nos dibuje en su sencillez más genuina esta ley, que las constantes y siempre iguales escenas representadas por nuestros antepasados en sus relaciones comunes. No la imaginación atrevida sino la investigación científica, la interpretación racional de los restos prehistóricos, ha permitido á los modernos arqueólogos reconstituir la vida de nuestros mayores, y á favor de esa reconstitución enseñárnosles como los instrumentos más sencillos de una fecunda ley biológica y social.

Pero así que la complejidad social aumenta el principio de la lucha por la existencia, sin desaparecer cambia de aspecto, se envuelve en manifestaciones múltiples, á veces tan disfrazadas que cuesta trabajo descubrirle.

El hombre primitivo lucha francamente por la vida. La satisfacción de las necesidades orgánicas, animales realmente, es el único incentivo que le mueve. Así es que sólo por realizar este fin de la existencia se agita, se vuelve y revuelve con ímpetus salvajes hacia aquel que le estorba, y no descansa hasta tanto ha satisfecho su violento apetito ó ha perecido en la demanda.

Pero posteriormente la lucha pierde aquel carácter de sencillez animal y de violencia feroz. El hombre se civiliza; nuevos incentivos provocan su actividad, nuevos deseos de nueva índole, se adueñan de su voluntad, y de ahí que, obedeciendo siempre al imperio de la ley de luchar para vivir, disimula su obediencia servil á dicha ley, y pretextando generosidades y heroísmos de valor inaudito, no hace otra cosa que trabajar á veces heroicamente para mantener su existencia amenazada por enemigos poderosos.

El hombre salvaje no disimula el móvil de sus acciones, ni oculta la ley á que obedece, por lo mismo que su sencillez primitiva no le da los medios de disfrazar nada, y porque, además, entiende proceder útilmente en sus actos importantes.

El hombre civilizado procede de distinta manera. Sabe que lucha para vivir; pero en posesión de recursos abundantes que le facilitan el medio de cohonestar sus acciones, los utiliza en este sentido, pero siempre dejando ver el móvil profundo que le impele á obrar.

No hay ningún hecho de la humanidad, de esos que llenan la historia y agigantan al humano linaje, que no repose en un móvil utilitario, ó constituya una aplicación del principio de la lucha por la vida.

Desde la redención cristiana hasta la revolución francesa, hasta la emancipación de América, siempre vese campeando en la historia aquella inflexible ley, y á las gentes movidas ora mansamente, ora como torrente ensordecedor por su empuje titánico.

Jesús vino al mundo para redimir la humanidad del pecado, para rescatar con su sangre divina al hombre pecador.

Esto dicen los panegiristas de Cristo, y desde luego nosotros no amenguamos el edificante propósito del mártir del Gólgota. Pero en el fondo de la acción cristiana ¿no hay un propósito utilitario? En la propaganda de Jesús para cimentar una nueva fe y crear una religión unitaria, ¿no está visible también el principio de la lucha por la vida?

Son dos tendencias religiosas que entran en lucha, dos principios de aplicación social que van á disputarse la posesión de las gentes, y que simbolizan las concupiscencias de la carne, la pluralidad de idolatrías, el uno con los Césares á la cabeza, y la unidad religiosa, la exaltación del espíritu el otro, pregonada y defendida con el sacrificio del Maestro.

Por lo demás, ¿no es la lucha la batalla cruenta y duradera de

un mundo nuevo con otro mundo secular? ¿No son las viejas creencias, las seculares costumbres, los hábitos eternos que soportan el cmbate tímido primero y franco y poderoso después, de las nuevas aspiraciones de la humanidad? ¿No es, finalmente, esa larga lucha un aspecto determinado del principio eterno de la lucha por la vida, puesto en acción una vez más para beneficio de la especie humana?

Si Jesús no hubiera venido al mundo, el paganismo romano habría concluído por sucumbir también á manos de otro instrumento del progreso; porque la vitalidad de las instituciones tiene un límite en el espacio y en el tiempo, y porque además, las ideas y sentimientos nuevos que se elaboran y forman, y que constituyen el progreso de las colectividades pensantes, están animados siempre de actividad expansiva.

La quietud no es una ley para la humanidad, ni aun para la China; apenas si un accidente en las agitaciones perennes del universo. La perpetuación indefinida del paganismo antiguo hubiera sido un contrasentido en la dinámica social; algo tan fenomenal y estupendo como la quietud de los mundos en sus órbitas inmensas.

Las irrupciones bárbaras que derrumbaron con estrépito ensordecedor al Imperio Romano, son otro ejemplo de la acción constante é inflexible del principio de la lucha por la existencia. ¿Qué fuerza poderosa movía aquellas hordas numerosas y bravías del Norte? ¿Por qué razón pueblos enteros abandonaban sus territorios ignotos, y vadeando ríos, trasponiendo montañas, y desafiando los riesgos de emigraciones penosas, avanzaban contra un enemigo tan formidable como el pueblo romano?

Incentivos poderosos sin duda debían moverles, pues no se concibe sino por la influencia de un motivo muy enérgico la realización atrevida de actos memorables como aquellos que destruyeron á Roma y dieron origen á una nueva civilización.

Dicen los historiadores, en efecto, que la barbarie se agitó en las heladas regiones del Norte al empuje del hombre, por la influencia poderosa de la necesidad, representada por la escasez de alimentos y el exceso de población.

Roma decadente ofrecía también un pasto fácil y sabroso á la voracidad de los bárbaros. La lucha por la vida debió tener y tuvo sin duda una manifestación evidente en las invasiones bárbaras y en las resistencias tardías y débiles del pueblo-rey.

Y cuando el Imperio Romano desaparece transformándose en la

nueva organización que le dieron las tribus del Norte, cuya más genuina expresión es el feudalismo, un nuevo germen de lucha empieza á incubarse al calor de una opresión inmemorial.

Surge la Edad Media; la edad romántica de las humanas generaciones pasadas y también la noche de la historia, como alguien la ha llamado. El señor feudal ejerce una suzeranía abominable sobre el siervo; la iglesia y los nobles avasallan sin piedad al pueblo llano, verdadero ilota, verdadero esclavo en medio de una situación de fuerza y concupiscencias.

La vida está en peligro desde luego para un órgano importante de la entidad social. Un órgano ó dos pueden vivir y desarrollarse á expensas de un tercero, pero produciendo el sacrificio de éste, si éste no reivindica sus fueros, y sobre todo, si no procura á su vez defenderse del ataque.

La clase media de la Europa cansóse de soportar el yugo de la nobleza y del clero. La lucha, pues, resurgió una vez más en el escenario del mundo, motivada, engendrada por la necesidad de vivir según los deseos vehementes de la naturaleza. El estallido de la revolución francesa, pues, no significa otra cosa que un aspecto determinado del principio de la lucha por la existencia, tan característico y tan intenso como el antagonismo perenne entre las fuerzas secretas de la naturaleza viva.

La Europa descubre los vastos territorios de la América y desde luego conquista á sus moradores, fundando colonias y establecimientos para su exclusivo beneficio.

La conquista de América, así como la emancipación de la misma en los comienzos del siglo presente, no significan otra cosa también que manifestaciones del principio de la lucha por la vida.

La España estaba en condiciones de extender sus dominios territoriales y acrecentar los beneficios de sus industrias generalizando el mercado. Aparte de desear preponderancia política en el continente, le interesaba adquirir imperio económico, y en este doble sentido nada más propicio que llevar su influencia allende los mares, después de haber concluído con la dominación arábiga en toda la península. Realizada la conquista con propósitos políticos y económicos, vale decir, vitales para el organismo social que la inició, prodújose la reacción en el elemento conquistado, reacción que á su vez expresa una faz de la necesidad de luchar para vivir.

Tanto la acción conquistadora como la reacción revolucionaria,

han sido dos necesidades vitales para sus respectivos agentes. Si la España no conquista, hubiera eludido la ley que impele á todos los organismos vivos á extender la esfera de su actividad; y si la reacción de los americanos no se produce, hubieran también éstos contrariado la fuerza que obliga al hombre y á los pueblos á vivir cada vez mejor ó más en armonía con sus tendencias ingénitas ó adquiridas. En ambos casos está en juego un principio vital, una ley biológica, una exigencia ineludible para cualquier agente activo.

Es posible aplazar cuando más, sin embargo, la eficiencia de la acción antagónica. Si la conquista del suelo americano hubiera sido una conquista racional y atemperada por un sistema prudente y conciliador de intereses, probablemente hubiérase podido detener la reacción emancipadora, y aplazar el grito de libertad de los nativos durante algunos siglos más. Pero la reacción está generalmente en relación con la acción. Es posible resistir mucho tiempo un peso liviano, pero no es fácil resistir una carga pesada.

Las exigencias ilimitadas de los ingleses respecto de los colonos de la América del Norte, impelieron á éstos á la revolución. Si no hubiera sido la cuestión fiscal de los derechos al té, tal vez la emancipación de los yankees aun fuera problemática.

¿Pero á qué insistir más sobre la universalidad y permanencia del principio de la lucha por la vida? ¿No está visible por doquiera? ¿No le vemos en la historia y en la naturaleza? ¿Acaso los pueblos no están en incesante lucha, como está toda la naturaleza viva? ¿No batallan sin tregua los Estados, á pesar de sus protestas elocuentes de armonía internacional, como luchan y forcejean desde el infusorio hasta el mamífero, por obtener alguna ventaja individual ó específica que les facilite el sostenimiento de la vida?

No debemos olvidar, sin embargo, porque ello interesa al prestigio mismo de la ley citada, que su permanencia y universalidad está encubierta por aspectos diversos, los que sin duda alguna no la desvirtúan.

Siempre ha sido y será el propósito fundamental de los antagonismos individuales y sociales obtener ventajas; garantir, en fin, la permanencia vital. ¿Pero los medios de obtener ese resultado han sido los mismos siempre y serán los de hoy también los de mañana? Seguramente no.

En la Edad Media, por ejemplo, la acción bélica era la acción común. La guerra cruenta constituía la ocupación habitual del hombre, y jamás un pueblo se avistaba con otro para otra cosa que para devorarse ó esclavizarse.

En los tiempos anteriores al feudalismo también los hombres no mantenían más relaciones que las de la guerra, y entre los primeros pobladores de la tierra, ya lo hemos dicho, jamás hubo un momento de reposo en la esgrima del hacha, del boumerango y hasta de la mandíbula prognata.

Ahora la guerra como una manifestación de la lucha por la vida es un accidente en la conducta del hombre, pero no porque este principio haya dejado de actuar, ó porque el individuo no sienta la necesidad de luchar para vivir, sino porque esa lucha ha adquirido un nuevo aspecto, ú otro ropaje distinto de aquel que antes tenía. El desarrollo prodigioso de la industria, que ha engendrado la introducción de las máquinas en la producción, esto es, el cambio que ha producido en el mundo la sustitución de las fuerzas físicas y químicas á las fuerzas musculares, es el verdadero factor que al presente actúa en el sentido de modificar el carácter de la lucha vital. Hoy los hombres no se devoran materialmente, ni se beben la sangre caliente, ni se esclavizan en la genuina acepción de esta frase, ni se masacran en montón mutuamente, con el propósito de obtener ventajas positivas, pero sí se saquean lícitamente ejercitando el comercio; sí se esfuerzan por esclavizar industrialmente á sus semejantes, por monopolizar los mercados y por extender con ambición inaudita la esfera de su preponderancia comercial, económica y política, y todo eso con el fin de dar satisfacción á necesidades ineludibles.

La producción francesa rivaliza con la producción inglesa y alemana. La clase comercial de esos Estados manufactureros pugna por asegurarse una preponderancia invencible en los mercados consumidores, y á favor de la libertad de comercio preconizada y enaltecida por todas las constituciones liberales del presente, el individuo está armado de instrumentos tan destructores como el hacha y la lanza de nuestros antepasados.

Una lucha, pues, tan general como la del pasado existe trabada entre las generaciones del presente, con la circunstancia encomiástica, sin embargo, de que la lucha de hoy es fecunda y pródiga en la producción y distribución de beneficios materiales dentro de lo natural.

Las suzeranías industriales que al presente existen carecen sin duda de la índole abominable que caracteriza á las suzeranías políticas. Un Estado que es tributario industrial de otro Estado, no podrá considerarse razonablemente jamás como un siervo que trabaja y produce para el señor á cambio de insignificantes compensaciones.

Un tributarismo verdadero no existe en el mundo económico si hemos de hablar con franqueza: ha dado lugar al mutualismo industrial.

Veamos, en efecto, qué carácter tienen las relaciones comerciales de la Europa con la América, por ejemplo, sobre todo en el comercio de manufacturas; centro este último que se ha querido considerar como tributario de los mercados europeos.

Desde luego es evidente que en Europa tienen su asiento los centros fabriles por excelencia; que la industria manufacturera está allí profundamente arraigada é inusitadamente extendida. ¿Pero puede considerarse el fabricante europeo como un señor feudal respecto del productor americano? ¿Pueden los mercados de Francia, Alemania, Inglaterra, Bélgica, Italia, etc., considerar á los mercados productores y consumidores de América como sus tributarios?

En tiempo del coloniaje español, seguramente sí, porque la España no solamente mantenía en sometimiento político á todas sus posesiones de América, sino que también les imponía un comercio peculiar y calculado á realizar las ventajas de su sistema económico y financiero.

Pero al presente, aquella dependencia servil del consumidor al productor se ha transformado en un mutualismo saludable y levantado, porque el que consume produce también y el que produce consume; con lo cual el equilibrio económico, la igualdad comercial se ha fundado.

La América exporta é importa, y á su vez los mercados europeos realizan iguales funciones económicas. Y esa doble corriente comercial no es un hecho fortuito y que reposa sobre bases arbitrarias; no. Tiene un punto de apoyo que no podrán remover las voluntades humanas, y un curso ya permanente que nada estañará en el porvenir.

De ahí que la dependencia entre las actividades productoras sea mutua, igualitaria, mancomunada.

La América exporta las materias primas con que la Europa sos-

tiene sus fábricas; cuyas materias, una vez transformadas, retornan al consumo americano. De ahí una solidaridad industrial fecunda en beneficios, no solamente económicos, sino que también sociales.

Empero, la armonía que parece fundar este régimen mutualista, no es sino aparente, desde que en el fondo de todas las conciliaciones vese la lucha tenaz é implacable de los intereses rivales. Los productores similares pugnan por asegurarse una preponderancia respectiva de más en más creciente y egoísta; y aun entre los que se cambian servicios ó productos no se desperdicia jamás la ocasión de obtener ventajas respectivas con menoscabo de otros intereses.

El que compra quiere comprar barato, y el que vende cifra toda su ambición en vender caro.

II

Otro signo característico de nuestra época consiste en el prodigioso desarrollo de los intereses económicos y comerciales; y es por esta razón que todas las miradas inteligentes, con la intuición al menos de los tiempos que corremos, se han fijado en el medio de encauzar esa corriente torrencial, de estudiar sus proyecciones monstruosas y de investigar las leyes fundamentales que la gobiernan y fomentan.

Esta conducta no puede ser más sabia por el criterio positivo y racional que entraña en sus agentes. ¿Qué más racional, en efecto, que encararse con los acontecimientos para conocerlos, y después de conocidos explotarlos? ¿Qué conducta más sabia podría exigirse á una sociedad que ésta: adquirir pleno conocimiento de las necesidades que siente, de las fuerzas que posee, y de los medios de satisfacer aquéllas?

Sería una conducta deleznable y absurda, por ejemplo, la de un pueblo que quisiese contrariar absolutamente el influjo de fuerzas naturales poderosas; nos recordaría la insanía de aquel déspota de la antigüedad, que quiso castigar á las olas porque le hicieron zozobrar una flota.

Cada época histórica tiene sus tendencias y obedece á leyes relativamente inflexibles. Las tendencias caballerescas de la Edad

Media, por ejemplo, constituían un signo de la época y hubiera sido extremadamente absurdo pretender entonces fundar duraderamente costumbres contrarias. Lo regular, pues, era á la sazón darse cuenta de esas tendencias para cuando más corregir sus excesos, y de todos modos hacerlas servir á un fin de utilidad social.

El desarrollo inusitado del sentimiento religioso ha sido otro signo del pasado; y en esto también hubiera existido insanía si se hubiese querido borrar ese signo, aun cuando á costa de sacrificios cruentos.

¿No fundó Jesús un imperio religioso contra la resistencia colosal del gentilismo, sin embargo? Sí, pero con el concurso también colosal de las circunstancias que le rodeaban y después de una lucha secular.

Jamás la voluntad humana ha alcanzado conquistas duraderas y plausibles apoyada en su sola fuerza; y en este sentido el valor de los grandes hombres sólo puede admitirse en cuanto han sido los primeros en comprender las tendencias de su tiempo, en cuanto han sido los primeros en darse cuenta de las aspiraciones más generales de la época, y los únicos en conocer los factores ocultos que actuaban, y finalmente, en servir de instrumentos preciosos á las revelaciones de una nueva luz.

Es necesario tener en cuenta que se trata, sino de hechos consumados (respecto de los cuales si son malos, lo más que puede hacerse es atemperar sus efectos), al menos de hechos inevitables, que están en la atmósfera, en el ambiente que nos circunda, en todas partes en fin, como el fluido etéreo que rodea y penetra todos los cuerpos existentes.

¿Qué haría un navegante en presencia de una tempestad? Seguramente tratar de resistirla, cuando no le fuera posible evitarla. ¿Y qué haría en presencia de un tiempo bonancible? Seguramente proceder en consecuencia; es decir, entregarse á la dominación del medio en que flota.

Así también las sociedades, si proceden con sentido práctico y razonable, no pueden ni deben hacer otra cosa que ajustar su conducta al imperio de las circunstancias que les rodean.

Hacer otra cosa es utópico.

De manera, pues, que movidas las actividades del presente por el incentivo del interés; dedicados todos los esfuerzos individuales y colectivos á conseguir situaciones mejores, y sobre todo á gene-

ralizar con propósito utilitario la esfera del comercio, surge la necesidad desde luego de organizar como corresponde todas esas fuerzas, para que, no obstante su fatalismo, puedan servir al interés de todos.

Algunos pensadores atrevidos, pero desgraciadamente apartados de las prescripciones de un método positivo y lógico, y más que con la carencia de este bagaje, obcecados por conceptos preconcebidos, han pugnado por enaltecer la voluntad del individuo extraordinariamente, sometiendo á un rol secundario de acción las verdaderas leyes que gobiernan el mundo moral y que determinan sus estados peculiares en la infinita carrera de la historia.

Y á favor de aquellas falsas ideas, los tropiezos han sido retumbantes, como lo son aún los que dan las escuelas y sectas, que desconociendo el estricto rigorismo de las leyes que regulan la producción y el consumo, pretenden crear situaciones prósperas para el obrero contra el imperio de dichas leyes.

No; es preciso abrazar otra bandera distinta de la que han empuñado los próceres del idealismo económico, filosófico y político. Es preciso darse cuenta de la condición humana y de lo que significa la sociedad, así como de las influencias verdaderas que con rigor invariable producen aquí la felicidad suprema y en otra parte desgracias infinitas, no obstante los esfuerzos abnegados de muchos en contrario.

El mercantilismo actual es una ley de nuestro tiempo, que no podrá contrariar desde luego ninguno de los intereses de otra índole á que puede perjudicar.

La sociedad moderna vive del intercambio, repetimos, favorecido en esta labor por la destrucción del aislamiento internacional, por la caída de las barreras que en otro tiempo limitaban los mercados al comercio material y aun mismo á las alianzas impalpables del pensamiento.

Se comprende fácilmente que generalizadas las relaciones individuales y sociales, aumentado el círculo que abarcaba el comercio material é intelectual de los pueblos, dicho comercio ha debido crecer en proporción al campo que se le dejaba libre, cuando no por otra causa, por su sola fuerza expansiva.

Así como un gas sólo se expande hasta donde se lo permiten las paredes de la vasija que le contiene, del mismo modo, la producción, el consumo, el comercio en fin, sólo han podido extenderse hasta encontrar los límites artificiales y naturales estableci-

dos por la autoridad social, impelida á su vez á obrar por leyes naturales.

Y es claro, roto el vaso, el gas hase difundido en razón de su fuerza expansiva y de las facilidades que ha encontrado. En el camino ya de las libertades comerciales, de las transacciones, del tráfico de más en más activo y fecundo, no se ha podido retroceder fácilmente; al contrario, se ha avanzado inusitadamente, y se avanza aún, de manera á absorberlo todo.

¿Qué efectos produciría un retraimiento del comercio internacional? Podemos calcularlo, si hubiera de ser permanente, por los efectos desastrosos que producen algunas crisis parciales en los mercados productores y consumidores.

¿Qué sería de las sociedades civilizadas todas si por acaso cesara repentinamente el cambio activo y vigoroso del presente para dar lugar á una parálisis comercial?

Veamos sencillamente, para formarnos idea, lo que le sucede á un organismo vivo cuando cesa en él la circulación de la sangre por la parálisis de los órganos que sirven á la circulación sanguínea: la muerte.

Pero aquí cabe una advertencia, sin embargo, que no debemos dejar olvidada. Si es evidente que la comercialidad invade todas las esferas de la actividad humana, no es menos cierto que la sociedad posee los medios y el derecho de regularizar aquella circulación; de organizar dicha comercialidad, á efecto de que produzca los resultados económicos á que está naturalmente destinada. ¿No se procede así higiénicamente con la circulación fisiológica? ¿No corrige un adecuado régimen higiénico las precipitaciones de la circulación, como la fomenta ó activa cuando es lenta?

Pueden servirnos de ejemplo también las perturbaciones sociales que se producen de continuo en la vieja Europa por el desequilibrio entre el trabajo y el capital; perturbaciones que han provocado la iniciativa oficial á efecto de crear una armonía relativa.

Pero no obstante los beneficios relativos de la libertad de comercio, entendida sin perjuicio de los impuestos aduaneros creados con fin financiero, es posible augurar una reacción tal vez no lejana, desde que los excesos del libre cambio empiezan á hacer peligrar las armonías industriales. No se llegará probablemente á restaurar el régimen medioval de las corporaciones ni de los mercados apropiados, pero sí á proteger las industrias locales y el trabajo de cada gremio contra concurrencias odiosas.

He ahí también cómo la acción del Estado está llamada á representar papel importante en ese asunto, presentándose como regulador necesario en el desenvolvimiento activo del comercio y de las industrias.

III

El siglo en que vivimos, dado con frecuencia á analizar, á comparar y á investigar con prolijidad, animado por una sed insaciable de conocimientos, los secretos tanto del mundo físico como moral, ha descubierto también que la sociedad marcha hacia una vinculación cada vez más pronunciada; esto es, que el lazo de unión entre los hombres y los pueblos cada vez se consolida más fuertemente.

Comparando, en efecto, las sociedades del pasado con las sociedades del presente, se descubre sin grande esfuerzo que, todo lo separadas que antes vivían están ahora unidas. Y si nos diéramos á buscar las causas que motivan esos acercamientos, encontraríamos actuando, entre otras, la mayor potencia colectiva que surge de la mancomunidad de intereses y aspiraciones. Es indudable, en efecto, que al amparo de una solidaridad rigorosa de intereses morales y económicos, el bienestar común se consolida, la protección mutua es más eficaz y los esfuerzos del individualismo para prosperar encuentran propicia ayuda.

Cuando los Estados políticos y económicos tenían que bastarse á sí mismos y hacer una vida aislada, probablemente tenían que desarrollar fuerzas considerables para satisfacer sus necesidades peculiares y aun para mantener el orden político. La potencia social, pues, estaba reducida al mínimum de su intensidad por el estado de división que la afectaba. Por el contrario, es indiscutible que asociadas todas esas fuerzas parciales, apenas útiles para obtener resultados escasos, han centuplicado su importancia y energía de tal manera, que al presente pueden realizar obras colosales.

No ya en las relaciones privadas de los hombres ese acercamiento es rápido y constante, sino que también se produce en las relaciones de los Estados políticos.

Multitud de actos que en tiempos pasados eran del resorte in-

dividual, es decir, que se cumplían con el solo esfuerzo de un individuo, ó que no tenían más repercusión que la escasa que permitía el estrecho círculo de las relaciones individuales, al presente abarcan un radio mayor y exigen la cooperación común necesariamente.

En las esferas del trabajo reproductivo el esfuerzo individual era á la sazón el único que se veía con generalidad; pero poco á poco, y en razón de causas conocidas, fué cambiando de aspecto, fué haciéndose colectivo, hasta nuestros tiempos, en que bajo aquella forma primera, se presenta como excepción solamente.

Y es lógica esta transformación. El paso de la *pequeña* á la *grande industria*, apareja la mancomunidad de esfuerzos, de capitales y de iniciativas.

El capital relativamente importante que exigen las empresas fabriles y comerciales del presente no puede fácilmente encontrarse en uno solo, pero sí se consigue con la contribución de varios.

A excepción del Estado, escasísimos son los particulares que podrían con su solo capital fundar y desarrollar grandes industrias en nuestro tiempo; y por esa razón es forzoso recurrir al colectivismo, á la creación de capitales mediante la cooperación anónima ó declarada de los individuos.

¿No es colosal, en efecto, el incremento que ha tomado la institución de las sociedades anónimas? ¿Los sindicatos no son hoy la forma general de las grandes empresas industriales y financieras?

Y este signo de nuestro tiempo acusa una ventaja que debe tenerse en cuenta. Democratizado el trabajo y el capital, forzosamente la responsabilidad así como el interés económico adquieren una base más amplia. Cuando toda una sociedad, en efecto, posee interés directo en las empresas creadas con fin lucrativo, desde luego es forzoso admitir que el éxito de esas empresas reposa sobre una base más amplia de responsabilidad é interés, que cuando sólo compromete el interés de unos pocos.

¿Por qué todos los miembros de una sociedad se sienten heridos cuando se ataca por un extraño, por ejemplo, la integridad territorial de la nación?

Porque todos esos miembros entienden que se les despoja de una propiedad, ó se les amenaza en su derecho.

Y no solamente el acercamiento que señalamos es fecundo en ventajas de carácter económico, sino que también beneficia los intereses políticos de la sociedad.

Es evidente que al amparo del individualismo político los gobiernos personales, autoritarios é inmorales, cosechan espléndidos frutos y consolidan su permanencia. Pero cuando la fuerza de los verdaderos y honestos intereses políticos mueve todas las iniciativas y congrega en una fuerte unidad política á los ciudadanos, entonces el gobierno está sometido al control de una inteligencia superior y gobernado á su vez por una acción poderosa, tan capaz de teorizar como de obrar.

La mejor manera para destruir el predominio de las camarillas, así como la influencia anacrónica de los caudillejos, consiste en la robustez del colectivismo, en la amplitud grande que debe darse al concepto y á las prácticas sociales, verdadera condición, por otra parte, del imperio de la democracia política.

Montaigne, el filósofo más sonado del individualismo en el siglo XVIII, decía: "Borra la huella á la puerta de tu manida".

Esta sentencia es la antítesis de las aspiraciones modernas, mejor encuadradas en el pensamiento que reune á todos los hombres en una confesión común de intereses y de ideales.

Agrimensura Legal

POR DON CARLOS BURMESTER

Agrimensor y Catedrático de la Universidad

(Continuación)

Cuando el testamento abierto ha sido otorgado con las solemnidades prevenidas en los artículos anteriores, se le da fe para todos los efectos de derecho, sin necesidad de diligencia alguna judicial (artículo 761 del Código Civil).

El testamento solemne cerrado deberá ser firmado por el testador, presentado á un Escribano y cinco testigos, quienes *harán constar* la legalización en la forma dispuesta por el artículo 762 del Código Civil y con las solemnidades establecidas por los artículos 763 á 766 del mismo.

No puede ejecutarse el testamento cerrado sin haberse protocolizado por el Escribano actuario del Juez ante quien se hubiera presentado.

Del testamento menos solemne ó especial

Cinco son las formas del testamento menos solemne, y son: por ante tres testigos en los casos de ataque ó incidente repentino y donde no hubiere Escribano; por ante tres testigos ó por ante un Escribano y dos testigos en el caso de incomunicación por peste ó enfermedad contagiosa. Este testamento sólo es válido dentro de los 180 días de pasado el peligro, según el artículo 773 del Código

Civil y con los requisitos preceptuados en el artículo 774; en tiempo de guerra el testamento militar, por ante un capitán, comisario, auditor de guerra, capellán, médico ó cirujano, y dos testigos, con el *visto bueno* del jefe de la plaza ó expedición, artículos 775 á 777; en el mar y en viaje, en duplicados por ante el comandante y contador de los buques de guerra; por ante el capitán y sobrecargo de los buques mercantes y dos testigos (artículos 779 y 780 del Código Civil) con los requisitos y formalidades establecidas en los artículos 781 á 789, y por último por ante el agente diplomático ó consular el oriental que resida en país extranjero (artículo 790 del Código Civil).

Capacidad para adquirir y disponer por testamento

— No pueden disponer por testamento:

1.º Los impúberes, esto es, los varones menores de 14 años, y las mujeres menores de 12.

Los que hayan cumplido respectivamente esa edad, podrán testar libremente, aunque se hallen bajo la patria potestad.

2.º Los que se hallaren bajo interdicción, por razón de demencia, aunque tuvieren intervalos lúcidos.

3.º Los que sin estar bajo interdicción, no gozaren actualmente del libre uso de su razón, por demencia, ebriedad ú otra causa.

En este caso, el que impugnare la validez del testamento, deberá probar que el que lo hizo no gozaba del libre uso de su razón.

4.º Todo el que de palabra ó por escrito no pudiere expresar su voluntad claramente.

5.º Los que han hecho votos monásticos, á menos que obtengan relajación de ellos.

Los individuos no comprendidos en las prohibiciones de este artículo son hábiles para disponer por testamento (artículo 793 del Código Civil).

— Pueden adquirir por testamento todos los que la ley no declare incapaces ó indignos (artículo 796 del Código Civil).

— Son incapaces:

1.° El que no estuviere concebido al tiempo de abrirse la sucesión, ó aunque concebido, no naciere viable, conforme á lo dispuesto en el inciso 3.° del artículo 191.

2.° Las asociaciones ó corporaciones no permitidas por las leyes (artículo 797 del Código Civil).

— Son indignos, y como tales no pueden adquirir por testamento:

1.° El condenado en juicio por crimen ó tentativa de homicidio contra la persona de cuya herencia se trata, contra el cónyuge y contra los descendientes de ella.

Si alguno de los herederos forzosos incurre en esta clase de indignidad, pierde su legítima.

2.° El heredero varón y mayor de edad que, sabedor de la muerte violenta del difunto, no la denuncia dentro de sesenta días á la justicia, cuando ésta no ha procedido ya de oficio sobre ella.

Si los homicidas fueran ascendientes ó descendientes, hermano ó mujer del heredero, cesará en éste la obligación de denunciar.

3.° El que voluntariamente acusó ó denunció al difunto de un delito capital.

4.° El pariente que, sabiendo ser heredero presuntivo del difunto y hallándose éste demente y abandonado, no cuida de recogerle, ó hacerle recoger en un establecimiento público.

5.° El que para heredar estorbó por fuerza ó fraude, que el difunto hiciera testamento, ó revocara el ya hecho, ó sustrajo éste ó forzó al difunto para testar.

Las causas de indignidad, expresadas en este artículo, comprenden también á los legatarios (artículo 804 del Código Civil).

Las disposiciones contenidas en los artículos 797 á 814 del Código Civil reglamentan los casos de capacidad ó incapacidad para disponer y adquirir por testamento.

De la institución y sustitución de herederos

— El que no tiene asignatarios forzosos puede disponer en testamento de todos ó parte de sus bienes, por los títulos expresados en el artículo 742 del Código Civil (artículo 815 del Código Civil).

— La sustitución de heredero en segundo á ulterior grado para el caso de que el nombrado en grado anterior no quiera ó no pueda aceptar la herencia, es la única sustitución reconocida por la ley (artículo 820 del Código Civil).

Los artículos 816 á 831 reglamentan el modo y forma de instituir y sustituir herederos.

— *Asignaciones forzosas* son las que el testador está obligado á hacer, y que se suplen cuando no las ha hecho, aun en perjuicio de sus disposiciones testamentarias expresas.

Estas asignaciones son:

1.° Los alimentos que se deben por la ley á ciertas personas.
2.° La porción conyugal.
3.° Las legítimas (artículo 832 del Código Civil).

Los alimentos que el difunto debía gravan la masa hereditaria si el testador no ha impuesto ese gravamen á algún heredero (artículo 833 del Código Civil).

De la porción conyugal

La porción conyugal es aquella parte del patrimonio del cónyuge premuerto, que la ley asigna al cónyuge sobreviviente que carece de lo necesario para su congrua sustentación (artículo 836 del Código Civil).

—Tendrá derecho á la porción conyugal aun el cónyuge divorciado, á menos que por sentencia se haya declarado culpable del divorcio (artículo 837 del Código Civil).

—El derecho se entenderá existir al tiempo del fallecimiento del otro cónyuge y no caducará en todo ni en parte por la adquisición de bienes que posteriormente hiciere el cónyuge sobreviviente (artículo 838 del Código Civil).

—El cónyuge sobreviviente que al tiempo de fallecer el otro cónyuge no tuvo derecho á porción conyugal, no la adquirirá después por el hecho de caer en pobreza (artículo 839 del Código Civil).

—Si el cónyuge tuviere bienes, pero no de tanto valor como la porción conyugal, sólo tendrá derecho al complemento, á título de porción conyugal (artículo 840 del Código Civil).

—Asimismo se imputará á la porción conyugal todo lo que el cónyuge sobreviviente tuviere derecho á percibir á cualquier otro título en la sucesión del difunto, incluso su mitad de gananciales si no la renunciare (artículo 841 del Código Civil).

—El cónyuge sobreviviente podrá en todo caso retener lo que posea ó se le deba, renunciando la porción conyugal, ó pedir la porción conyugal abandonando sus otros bienes y derechos (artículo 842 del Código Civil).

—La porción conyugal es la cuarta parte de los bienes del difunto, en todos los órdenes de sucesión, menos en el de los descendientes legítimos.

Habiendo tales descendientes, el viudo ó viuda será contado entre los hijos á los efectos del artículo 849, inciso 1.°, y recibirá como porción conyugal la legítima rigurosa de un hijo (artículo 843 del Código Civil).

—Si el cónyuge sobreviviente hubiere de percibir en la sucesión del difunto, á título de donación, herencia ó legado, más de lo que le corresponde á título de porción conyugal, el sobrante se imputará á la parte de bienes de que el difunto pudo disponer á su arbitrio (artículo 844 del Código Civil).

—En lo que el viudo ó viuda perciba á título de porción conyugal, sólo tendrá la responsabilidad subsidiaria de los legatarios.

Sin embargo el cónyuge á quien por cuenta de su porción conyugal haya cabido á título universal alguna parte de la sucesión del difunto, será responsable á prorrata de esa parte, como los herederos en sus respectivas cuotas.

Si se imputare á la porción conyugal la mitad de gananciales, subsistirá en ésta la responsabilidad especial que le es propia, según las disposiciones legales que reglan la sociedad conyugal (artículo 845 del Código Civil).

De las legítimas

—Llámase *legítima* la parte de bienes que la ley asigna á cierta clase de herederos, independientemente de la voluntad del testador, y de que éste no puede privarlos, sin causa justa y probada de desheredación.

Los herederos que tienen legítima se llaman *legitimarios* ó *herederos forzosos* (artículo 846 del Código Civil).

—Tienen legítima:

1.° Los hijos legítimos personalmente ó representados por sus descendientes legítimos.

2.° Los ascendientes legítimos.

3.° Los hijos naturales personalmente ó representados por su descendencia legítima (artículo 847 del Código Civil).

—Los legitimarios ó herederos forzosos concurren y son excluídos y representados, según el orden y reglas de la sucesión intestada (artículo 848 del Código Civil).

Habiendo sólo un hijo legítimo ó descendencia con derecho de representarle, será la porción legitimaria, la mitad de los bienes; si hay dos hijos, las dos terceras partes; si hay tres ó más hijos, las tres cuartas partes.

No habiendo hijos legítimos, ni descendencia con derecho de representarlos, la porción legitimaria será siempre la mitad de los bienes, que se dividirá en cuatro partes: tres de ellas para la legítima de los ascendientes legítimos, y la otra cuarta parte para la de los hijos naturales.

Si faltan los hijos naturales, la mitad íntegra formará la legítima de los ascendientes ó del ascendiente legítimo que hubiere.

A falta de descendientes y ascendientes legítimos, la totalidad de los bienes se dividirá en cuatro partes, y una de ellas, ó sea la cuarta parte, será la porción legitimaria de los hijos naturales.

Lo que reste del acervo, deducida la porción legitimaria, según lo dispuesto en los precedentes incisos, es la parte de bienes de que el difunto ha podido disponer en vida ó en muerte á favor de cualquiera, aunque sea extraño.

Lo que cupiere á cada uno de los herederos forzosos en la porción legitimaria será su legítima *rigorosa* (artículo 849 del Código Civil).

—Toda renuncia ó transacción sobre la legítima futura y aquellos que la deben y sus herederos forzosos es nula; y los segundos podrán reclamarla cuando mueran los primeros; sin perjuicio de traer á colación lo que hubieren recibido por la renuncia ó transacción (artículo 850 del Código Civil).

—Para fijar la porción legitimaria, se atenderá al valor de los bienes que hayan quedado á la muerte del testador, previas las deducciones indicadas en el Título VI del Código Civil y sin comprender las deudas y cargas impuestas en el testamento.

Al valor del líquido producto de los bienes hereditarios se agregará imaginariamente el que tenían todas las donaciones del mismo testador en el tiempo en que las hizo (artículo 851 del Código Civil).

—Fijada la porción legitimaria con arreglo al artículo anterior, para la reducción de las donaciones y legados á la porción disponible, se observará lo siguiente:

1.° No se llegará á las donaciones mientras pueda cubrirse la porción legitimaria reduciendo ó dejando absolutamente sin efecto, si necesario fuere, las disposiciones testamentarias.

2.° La reducción de éstas se hará á prorrata sin distinción alguna.

Con todo, si el testador quiso que se pagara cierto legado con preferencia á otros, no sufrirá reducción sino después de haberse aplicado éstos por entero al pago de las legítimas.

3.° Si la disposición consiste en un usufructo ó renta vitalicia cuyo valor se tenga por superior á la parte disponible, los herederos forzosos podrán escoger entre ejecutar la disposición ó abandonar la parte disponible.

ÍNDICE DEL TOMO V

ÍNDICE

AÑO III—TOMO V

ENTREGA I — NOVIEMBRE DE 1893

ENTREGA II — DICIEMBRE DE 1893

Entrega III — Enero de 1894

Entrega IV — Febrero de 1894

Entrega V — Marzo de 1894

Entrega VI — 1894